

# الرياضيات الشاملة

التكامل - القطوع - الأعداد المنتالية



صالح رشيد بطارسة



حراسمة





# الرياضيات الشاملة

★ التكامل وتطبيقاته Integration

★ القطوع المخروطية Conic Sections

★ الأعداد المركبة Complex Numbers

إعداد

صالح رشيد بطارسة

دار أسامة للنشر والتوزيع

الأردن - عمان



الناشر  
دار أسامة للنشر و التوزيع

الأردن - عمان

- هاتف: 5658252 - 5658253
- فاكس: 5658254
- العنوان: العبدلي - مقابل البنك العربي  
ص. ب: 141781

Email: [darosama@orange.jo](mailto:darosama@orange.jo)  
[www.darosama.net](http://www.darosama.net)

حقوق الطبع محفوظة

الطبعة الأولى

2014م

رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية  
(2013/6/2214)

510

بطارسة، صالح رشيد

الرياضيات الشاملة/ صالح رشيد بطارسة. - عمان: دار أسامة  
للنشر والتوزيع، 2013.  
( ) ص.  
ر.أ: (2013/6/2214).  
الواصفات: الرياضيات/

ISBN: 978-9957-22-385-4

## الفهرس

٣	الفهرس . . . . .
٧	المقدمة . . . . .
٩	تنويه . . . . .

## التكامل وتطبيقاته

١٠	(٢٢ - ١) التكامل غير المحدود Indefinite Integration . . . . .
١٧	(٢٢ - ٢) التكامل المحدود وخواصه Definite Integration . . . . .
١٨	(i) الخاصية الخطية Linear Property . . . . .
٢٠	(ii) خاصية الاضافة Addition Property وعكسها . . . . .
٢٣	(iii) خواص المقارنة Comparision Properties . . . . .
٢٣	الشق الأول المقارنة بالاشارة سالبة أو موجبة.. . . . .
٢٥	الشق الثاني المقارنة بين اقترانين. . . . .
٢٦	(iv) اللا تغير عند الانسحاب . . . . .
٢٧	(v) التكامل على نقطة Intergration . . . . .
٢٨	(vi) تبديل حدي التكامل المحدود . . . . .
٢٩	(٢٢ - ٣) المعادلات التفاضلية Differential Equations . . . . .
٣٤	(٢٢ - ٤) طرق التكامل . . . . .
٣٥	الطريقة الأولى. . . . .

٣٥	التكامل بالقانون Integration by Rute . . . . .
٣٥	صيغة القانون للتكامل غير المحدود . . . . .
٣٥	وصيغة القانون للتكامل المحدود . . . . .
٣٧	تكامل الاقترانات الدائرية The Trigonometric Integration . . . . .
٣٩	التكامل بالتعويض Integration by Substitution . . . . .
٤٦	التكامل بالأجزاء Integration by Parts . . . . .
٤٧	قاعدة التكامل بالأجزاء . . . . .
٥٣	"تكامل الاقتران الأسّي الطبيعي" ص = . . . . .
٥٦	التكامل بالكسور الجزئية Integration by Partial Fractions . . . . .
٥٩	(٢٢ - ٥) تطبيقات التكامل . . . . .
٥٩	أولاً المساحات Areas . . . . .
٦٧	ثانياً التطبيقات الاقتصادية للتكامل . . . . .
٧٤	التطبيقات العلمية للتكامل . . . . .
٧٩	(٢٢ - ٦) أمثلة محلولة على التكامل وتطبيقاته . . . . .
٩٩	(٢٢ - ٧) أسئلة وتدريبات وتمارين تتطلب حلولاً من الدارسين والدارسات . . . . .

## القطع المخروطية

١٢٠	(٢٣ - ١) القطع المخروطي والمحل الهندسي . . . . .
١٢٢	(٢٣ - ٢) القطع المكافئ . . . . .
١٣٤	(٢٣ - ٣) القطع الناقص . . . . .



١٤٥	٢٣ - ٤) القطع الزائد . . . . .
١٥٧	٢٣ - ٥) أمثلة محلولة على القطوع المخروطية . . . . .
١٨١	٢٣ - ٦) أسئلة وتدريبات وتمارين تتطلب حلولاً من الدارسين والدارسات . . . . .

## الأعداد المركبة

١٩٤	٢٤ - ١) العدد المركب Complex Number . . . . .
٢٠٢	٢٤ - ٢) العمليات الرياضية على الأعداد المركبة . . . . .
٢٠٢	(i) عملية المساواة Equally في حقل الأعداد المركبة . . . . .
٢٠٤	(ii) جمع وطرح الأعداد المركبة . . . . .
٢٠٤	(iii) ضرب الأعداد المركبة . . . . .
٢٠٦	(iv) قسمة الأعداد المركبة . . . . .
٢٠٦	أولاً المرافق Conjugate . . . . .
٢٠٧	ثانياً المقياس Modulus . . . . .
٢٠٧	ثالثاً المقلوب Invetse . . . . .
٢٠٩	٢٤ - ٣) الجذور التربيعية للأعداد المركبة . . . . .
٢١٣	٢٤ - ٤) حل المعادلات التربيعية في حقل الأعداد المركبة . . . . .
٢١٧	٢٤ - ٥) الجذور التكعيبية للواحد الصحيح في حقل الأعداد المركبة . . . . .
٢١٧	أولاً الجذور التربيعية للواحد الصحيح . . . . .
٢١٨	ثانياً الجذور التكعيبية للواحد الصحيح . . . . .
٢٢١	الخاصية الأولى . . . . .

٢٢١	الخاصية الثانية
٢٢٣	(iii) الخاصية الثالثة
٢٢٣	(iv) الخاصية الرابعة
٢٢٦	(٢٤ - ٦) حل أنظمة لمعادلات من الدرجتين الثالثة والرابعة بمتغير واحد
٢٣٠	(٢٤ - ٧) أنظمة الاحداثيات الديكارتية والقطبية
٢٣٠	نظام الاحداثيات الديكارتية Cartesian Coordinates System
٢٣٠	أما نظام الاحداثيات القطبية Polar Coordinates System
٢٣٤	(٢٤ - ٨) المستوى المركب والصورة القطبية للعدد المركب أ + ب ت
٢٣٤	المستوى المركب Complex Plane
٢٤٣	(٢٤ - ٩) أمثلة محلولة على الأعداد المركبة
٢٦١	(٢٤ - ١٠) أسئلة وتدريبات وتمارين تتطلب حلولاً من الدارسين والدارسات





## المقدمة

بعد الاتكال على الله، ، ،

قمت بتأليف وإعداد هذه السلسلة من الرياضيات تحت عنوان "الرياضيات الشاملة". بضمون كامل وعلم وافر وأسلوب نادر، نعم إنه أسلوب علمي بسيط يخلو من الحشو والغموض والتعقيد، كونه يعتمد على الاكثار من الأمثلة والتمارين لتوضيح المصطلحات والمفاهيم دون تكرار منفرد للدارسات والدارسين وبلا إيجاز مُدْمِر للنظريات والقوانين.

من المعلوم أن الرياضيات قديمة قدم الزمان وهبها الله للإنسان منذ أن خلق أبانا آدم وأمنا حواء. ولكن الآن ما عادت الرياضيات كما كانت عليه من أزمان مجرد مجموعة من الرموز والاشارات والأعداد..

ومع أنها كذلك إلا أنها أصبحت بالإضافة الى ذلك ضرورة من ضرورات الحياة كالهواء والماء والغذاء.. التي يحتاجها الانسان للقضاء على الجهل والفقر والمرض... تلك الآفات التي لا تتعايش إلا مع من تخلف من البشر،

لذا لا بُدُّ من القول إن:

الرياضيات جسرٌ للعبور الى عصر التكنولوجيا والعلوم الزاخر بالاختراعات والابتكارات والفنون، والتي نحن بحاجة ماسة اليها جميعاً لتسيير عجلة الحياة بكل يسر وبلا معاناة.

الرياضيات إن كنت لا تعلم هي بالذات معشوقة الجماهير المحبة للعلم، والقادرة على التفكير، ولكن لا يجرؤ على عشقها من البشر إلا من كان قوي الإرادة سريع البديهة سليم العقل والجسم معاً. وصدق من قال في هذا المضمون "العقل السليم في الجسم السليم". وأصدق منه من يقول: "الرأس بلا تفكير كالإناء المشروخ، كلاهما يستحق التكسير".

- ~ الرياضيات إن كنت لا تدري تُثمي الذكاء وتُشدُّب الأخلاق وتسمو بالإنسان إلى العلاء، كيف لا؟ وجميع رواد الفضاء من العلماء والرياضيين (علماء الرياضيات).
- ~ الرياضيات لا تحتاج من دارسها الكثير من الجهد والعناء، بل يجب عليه الإلمام البسيط بالقوانين والنظريات، ولكن ليس كالببغاوات بالحفظ دون الفهم! وإنما تحتاج إلى التدريب الكتابي الكافي، وباستمرار مع الدقة والإتقان والسرعة قدر الإمكان.
- ~ فيادارس الرياضيات عليك استخدام "الورقة والقلم" أفضل وسيلة لدراسة العلوم قاطبة، ، ، لتصبح بعد مدة من الزمن من علماء الرياضيات البارزين.. ونؤكد ونختتم على ذلك بقولنا آمين!...

المؤلف



التكامل وتطبيقاته

Integration





يرتبط التكامل بالتفاضل ارتباطاً وثيقاً، ويفسر هذا الارتباط رياضياً بأن التكامل عكس التفاضل بالمعنى والمضمون، كون عملية إيجاد الاقتران الأصلي  $Q(s)$  مثلاً (التكامل) هي عملية عكسية لعملية إيجاد المشتقة الأولى  $Q'(s)$  مثلاً (التفاضل).

## (٢٢ - ١) التكامل غير المحدود Indefinite Integration:

ان العلاقة الرابطة بين عمليتي التفاضل (الاشتقاق) والتكامل موضحة بهذه السطور:

المشتقة الأولى	الاقتران الأصلي
$Q'(s)$	$Q(s)$
إذا كان $Q_1(s) = s^2$ ← فإن $Q_1'(s) = 2s$	
وإذا كان $Q_2(s) = s^2 + 5$ ← فإن $Q_2'(s) = 2s$	
ثم إذا كان $Q_3(s) = s^2 - 5$ ← فإن $Q_3'(s) = 2s$	
وأخيراً إذا كان $Q_4(s) = s^2 + 5$ ← فإن $Q_4'(s) = 2s$	

والآن لو سألنا هذا السؤال: ما هو الاقتران الأصلي الذي مشتقته الأولى:

$$Q'(s) = 2s^2 - \text{الطرف الأيسر أعلاه} - 9$$

لأوقعنا الجواب في حيرة من أمرنا، كون هناك أربعة اقترانات هي:

$$Q_1(s), Q_2(s), Q_3(s), Q_4(s) \text{ كل منها مشتقته الأولى هي:}$$

$$Q'(s) = 2s^2, \text{ فأبها نختار ليكون هو الاقتران الذي مشتقته الأولى } Q'(s) = 2s^2$$

والذي إياه نريد. كوننا نعلم أن:







$${}^2\text{س}^3 = {}^1\text{س}^2$$

$$\text{و } {}^2\text{س}^3 = {}^1\text{س}^2 + 5$$

$$\text{و } {}^2\text{س}^3 = {}^1\text{س}^2 - 5$$

$$\text{ثم } {}^2\text{س}^3 = {}^1\text{س}^2 + \text{ج}$$

وحتى لا تطول حيرتنا في الاختيار، فإننا نختار الاقتران العام:

$$\text{ق (س)} = {}^2\text{س}^3 + \text{ج} ، \text{كون (ج)} = \text{صفر}$$

ليكون ق (س) =  ${}^2\text{س}^3$  ولأن ج عدد ثابت مشتقته صفر.

هذه العملية الإجرائية والتي انتهت باختيار ق (س) =  ${}^2\text{س}^3 + \text{ج}$  والذي مشتقته

الأولى ق (س) =  ${}^2\text{س}^3$  تسمى عملية التكامل Integration.

وبإيجاز شديد ولكن مفيد يمكن أن نكتب وبالرموز:

$$\int \text{ق (س)} \, \text{د س} = \text{ق (س)} + \text{ج} \quad (1)$$

ونقرأ تكامل الاقتران ق (س) هو ق (س)

حيث العلامة  $\int$  هي الحرف الأول من كلمة Summation أي المجموع (العلاقة

التكامل بالمجموع والذي لن تناقشه في هذا المستوى بالذات).

أي أن  $\int {}^2\text{س}^3 \, \text{د س} = {}^2\text{س}^3 + \text{ج}$  حيث ج يسمى ثابت التكامل Constant of

Integration.

نعم، هذه العلاقة التي تجسد عملية التكامل بوصفها عملية عكسية

لعملية التفاضل (الاشتقاق).

وأحياناً يُسمى الاقتران الأصلي ق (س) بالاقتران البدائي Antiderivative

. Function

## التكامل وتطبيقاته



ويرمز له بالرمز م (س) كون م (س) = ق (س)

وكأن م (س) = ق (س) حيث لا فرق بينهما.

وبعد هذا النقاش الطويل لو طلبنا وباختصار اجراء عملية التكامل:

ل ٥ س٤ د س ، فكأننا نسأل هذا السؤال:

ما هو الاقتران الأصلي ق (س) أو البدائي م (س) الذي مشتقته الأولى

ق (س) = ٥ س٤ ؟

المحاولة على الجواب تتطلب اللجوء الى طريقة التجربة والخطأ أو الحزر والتخمين، ولكن الرياضيات علم لا يعتمد على هذه الطريقة أو تلك، وانما على القوانين والنظريات الراسخة بالأذهان، والقابلة للتطبيق في كل زمان ومكان. لذا لا بد لنا من تدوين قانون التكامل للاقترانات الجبرية في مرحلة أولية هكذا:

ل ٥ س٤ د س  $\frac{٥ س٤}{١+٤} + ج$  { حيث ج ثابت التكامل ، و  $\neq -١$  والتفسير سيأتي فيما بعد }.

وعندها نجيب على السؤال السابق بكل ثقة ودقة هكذا:

$$ل ٥ س٤ د س = \frac{٥ س٤}{١+٤} + ج$$

$$= \frac{٥ س٤}{٥} + ج$$

$$= س٤ + ج$$

وهذا هو الجواب الصواب لأن (س٤ + ج) = ٥ س٤ + صفر

لذا فإننا نؤكد الحقيقة العلمية القائلة "عملية التكامل عملية معاكسة تماماً لعملية التفاضل". مثل عملية الطرح والتي هي عملية معاكسة تماماً لعملية الجمع هكذا:





## التكامل وتطبيقاته



$$7 = 5 + 5 - 7$$

فعند الطرح من عدد حقيقي ثم اضافة نفس العدد يعود العدد الأصلي الى قيمته الأصلية. أي أننا إذا أجرينا عملية الطرح على عدد حقيقي ثم أجرينا مباشرة عملية الجمع فالناتج هو العدد الحقيقي الأصلي.

وهكذا بالنسبة للتفاضل والتكامل:

ان  $\frac{d}{ds} \int ds = 1$  (س) د س = ق (س) {تكامل ثم تفاضل فكأننا لم نجر أيهما}

كون  $\int \frac{d}{ds} ds = 1$  (س) د س = ق (س)

وكذلك  $\frac{d}{ds} \int ds = 1$  (س) د س = ق (س)

وبشكل عام، دونك ملخص مفيد بالرموز:

(i)  $\int \frac{d}{ds} ds = 1$  (س) د س = ق (س) ----- (1)

(ii)  $\frac{d}{ds} \int ds = 1$  (س) د س = ق (س) ----- (2)

(iii)  $\int \frac{d}{ds} ds = 1$  (س) د س = ق (س) ----- (3)

مثال:

ما الاقتران الأصلي (البدائي) الذي مشتقه الأولي ق (س) = 3س<sup>2</sup> + 4س + 5

وكان السؤال يطلب منا اجراء عملية التكامل:

أجر:  $\int (3س^2 + 4س + 5) ds = 3 \frac{س^3}{3} + 4 \frac{س^2}{2} + 5س + C$  {حسب القانون}

مثال:

إذا كان ق (س) = 3س<sup>2</sup> أوجد  $\frac{d}{ds} \int ds = 1$  (س) د س





الحل:

$$\text{أولاً تكامل: } \int \frac{s^2}{3} ds + C$$

$$\text{ثم نفاضل } \frac{d}{ds} \left( \int \frac{s^2}{3} ds + C \right) = \left( \frac{s^2}{3} + C \right) = \text{صفر} = s^2$$

وبدلاً من هذا وذاك فإننا نستخدم العلاقة أو القانون:

$$\frac{d}{ds} \int f(s) ds = f(s) \text{ نفسه}$$

$$\text{ومنها } \frac{d}{ds} \int \frac{s^2}{3} ds = s^2$$

مثال:

$$\text{إذا كان } \int f(s) ds = s^4 + s + 4 \text{ أوجد } f(s), \text{ ق (1)}$$

الحل:

حتى نتخلص من التكامل أنجري عملية تفاضل هكذا:

$$\frac{d}{ds} \int f(s) ds = \frac{d}{ds} (s^4 + s + 4) = f(s)$$

$$\text{أي أن } f(s) = 4s^3 + 1$$

$$\text{ومنها ق (1) } 4 = 4(1)^3 + 1 = 5$$

وحتى نجد ق (س) فإننا نشق ق (س) هكذا:

$$\text{ق (س) } = 12s^2$$

$$\therefore \text{ق (1) } = 12 = 12(1)^2$$

مثال:

$$\text{إذا كان ص} = \int \sqrt{s^3 + 3s + 5} ds \text{ أوجد } \frac{d\text{ص}}{ds} \text{ } s = -1$$





## التكامل وتطبيقاته



الحل:

$$\int \frac{d}{ds} \sqrt{s^2 + 3s + 5} = \frac{d}{ds}$$

$$\therefore \sqrt{s^2 + 3s + 5} = \frac{d}{ds} \text{ الاقتران نفسه}$$

$$\text{ومنها} \int \frac{d}{ds} \sqrt{s^2 + 3s + 5} = \int \frac{d}{ds} \sqrt{s^2 + 3s + 5} = \int \frac{d}{ds} \sqrt{s^2 + 3s + 5}$$

مثال:

$$\text{إذا كان } q(s) = 4s^2 - 6s + 2 \text{ أوجد } q(1)$$

حتى نتخلص من التكامل تفاضل هكذا:

$$\frac{d}{ds} q(s) = \frac{d}{ds} (4s^2 - 6s + 2) = 8s - 6$$

$$\therefore q(s) = 12s - 12$$

$$q(s) = 24 - 12$$

$$\text{ومنها } q(1) = 24 - 12 = 12$$

$$\text{وهكذا يمكن أن يقال بأن القانون } s^2 + \frac{s}{1+s} = j + \frac{s}{1+s}$$

(حيث  $j \in \mathbb{C}$ ، و  $\neq 1$ ) قانون خاص بالتكامل غير المحدود.

فعندما  $\exists$  ط\* (عدد طبيعي)

$$\text{فإن } s^2 + \frac{s}{3} = j + \frac{s}{3}$$

وعندما  $\exists$  ط (عدد طبيعي)

$$\text{فإن } s + \frac{s}{3} = j + s \text{ (وكان } s \text{ التي طارت عند التفاضل)}$$

عادت بعملية التكامل



## التكامل وتطبيقاته



وهذا يسمى تكامل الاقتران الثابت كما يلي:

$$\int 7 \, dx = 7x + C$$

$$\text{وكذلك } \int -5 \, dx = -5x + C$$

وبشكل عام  $\int u \, dx = \frac{u^2}{2} + C$  ،  $u$  ح

وعندما  $u$  ص (عدد صحيح)

$$\text{فإن } \int x^2 \, dx = \frac{x^3}{3} + C = \int \frac{x^2}{1} \, dx = \frac{x^3}{3} + C$$

وعندما  $u$  ك (عدد نسبي)

$$\text{فإن } \int \frac{1}{x^2} \, dx = \int \frac{x^{-2}}{1} \, dx = \frac{x^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{x} + C$$

وعند تكامل الجذور يسمى أدلتها فإننا نحولها الى أسس نسبية هكذا:

$$\int \sqrt{x} \, dx = \int x^{\frac{1}{2}} \, dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} x^1 x^{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{3} x \sqrt{x} + C$$

$$= \frac{2}{3} x \sqrt{x} + C \quad \{ \text{كون السؤال يحوي جذراً فالجواب يجب أن يحوي جذراً} \}$$

وكأننا نستطيع تكامل  $x^n$  مهما كانت قيم  $n$  و كعدد حقيقي ما عدا

(-1) فقط.

مثال:

$$\text{أجر } \int (x^2 + 4x^2 + 5x + 7) \, dx$$

فإننا نكامل كل حد لوحده من خلال كثير الحدود نفسه هكذا:



## التكامل وتطبيقاته



$$= \frac{s^{1+2}}{1+2} + \frac{s^{1+1}}{1+1} + 7s + ج$$

$$= \frac{1}{2}s^2 + \frac{4}{3}s^3 + \frac{5}{2}s^2 + 7s + ج$$

(٢٢ - ٢) التكامل المحدود وخواصه Definite Integration:

ان كان ق (س) اقتراناً جبرياً فإن:

لـ  $\int u^w ds = \frac{u^{w+1}}{w+1} + ج$  هذا القانون يستخدم لتكامل الاقترانات الجبرية ويسمى التكامل غير المحدود.

وأما لتكامل الاقترانات الجبرية في النوع الثاني من التكامل "التكامل المحدود" فإننا نستخدم القانون.

$$\int_a^b \frac{u^w}{w+1} ds = \frac{u^{w+1}}{w+1} \Big|_a^b = \frac{b^{w+1} - a^{w+1}}{w+1}$$

حيث أ ، ب ∈ ح ، والعدد أ يسمى الحد الأدنى للتكامل.

والعدد ب يسمى الحد الأعلى للتكامل.

والجواب الناتج دائماً عدد حقيقي.

مثال:

أوجد  $\int_1^3 s^2 ds = \frac{s^3}{3} \Big|_1^3$  ونبدأ بتعويض الحد الأعلى - التعويض بالحد الأدنى.

$$= \frac{27}{3} - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}$$

وبشكل عام يمكن أن يقال:  $\int_a^b f(s) ds = F(b) - F(a)$  هذا بعد أن

نجد ق (س) لأن  $\int_a^b f(s) ds = F(b) - F(a)$

= ق (ب) - ق (أ) كما هو أعلام.





والآن يجب التمييز بين تفاضل التكامل المحدود وتفاضل التكامل غير

المحدود والتفسير:

$$\frac{d}{ds} \int_a^b f(s) ds = f(s) \text{ نفسه خاص بالتكامل غير المحدود}$$

$$\text{لكن } \frac{d}{ds} \int_a^b f(s) ds = \text{صفر حيث:}$$

$$\int_a^b f(s) ds = \text{دائماً عدد حقيقي و } \frac{d}{ds} (\text{العدد الحقيقي}) = \text{صفر}$$

والتوضيح في هذه الأمثلة:

مثال:

"تفاضل التكامل غير المحدود"



الاقتران نفسه

$$\text{أوجد } \frac{d}{ds} \int_0^2 s^2 ds = 2s = 2s$$

$$\text{لأن } \int_0^2 s^2 ds = \frac{s^3}{3} \Big|_0^2 = \frac{8}{3} - 0 = \frac{8}{3}$$

$$\text{ثم } \frac{d}{ds} \left( \frac{8}{3} \right) = 0 = 2s$$

مثال:

"تفاضل التكامل المحدود"



صفر دائماً

$$\text{أوجد } \frac{d}{ds} \int_{-1}^2 s^2 ds = \text{صفر}$$

$$\text{لأن } \int_{-1}^2 s^2 ds = \frac{s^3}{3} \Big|_{-1}^2 = \frac{8}{3} - \left( -\frac{1}{3} \right) = \frac{9}{3} = 3$$

$$\frac{d}{ds} (3) = 0 = \text{صفر}$$

وحتى يسهل استخدام القانون  $\frac{d}{ds} \int_a^b f(s) ds = f(s)$  في تكاملات

الاقتران الجبرية وعلى وجه الخصوص كثيرات الحدود يجب التعرف على خواص

التكامل المحدود التالية:

(i) الخاصية الخطية Linear Property:

وتتلخص بنقطتين أساسيتين هما:







مثال:

إذا كان  $\hat{J}(2s - 1)$  دس = 6 ما قيمة ج؟

الحل:

$$\hat{J}(2s - 1) \text{ دس} = \frac{\text{ج} \cdot \text{ج}^2}{\text{ج}} - \text{ج} = \text{ج}^2 - \text{ج} = 6$$

$$\therefore \text{ج}^2 - \text{ج} - 6 = \text{صفر}$$

$$(\text{ج} - 3)(\text{ج} + 2) = \text{صفر}$$

$\therefore \text{ج} = \{ -2, 3 \}$  الحد الأعلى للتكامل كما هو واضح أعلاه.

(ii) خاصية الاضافة Addition Property وعكسها:

ومفهومها ببساطة هو تجميع عدة تكاملات بتكامل واحد، وأما عكسها

فهو تفريق تكامل واحد الى عدة تكاملات، كما هو آت:

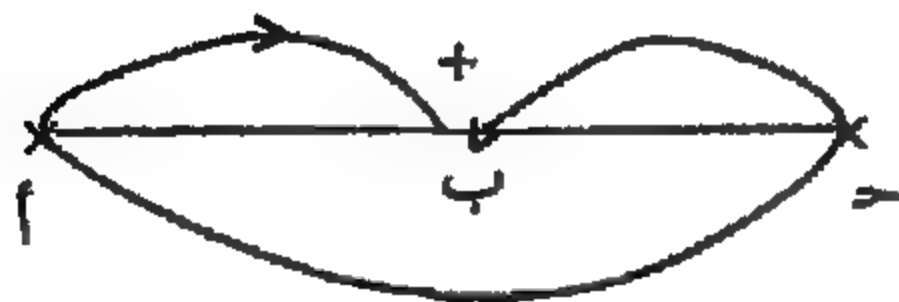
إذا كان ق (س) اقتران قابل للتكامل على فترة تنتمي اليها الأعداد

الحقيقية التالية أ ، ب ، ج مع وجود شرطين (١) أن يكون الاقتران نفسه (٢) أن

يكون الحد الأعلى للتكامل الأول = الحد الأسفل للتكامل الثاني، فإن:

$$\hat{J}_a^b \text{ ق (س) دس} + \hat{J}_b^c \text{ ق (س) دس} = \hat{J}_a^c \text{ ق (س) دس}$$

"تجميع عدة تكاملات في تكامل واحد"



كما في الشكل:

وعكسها أيضاً صواب أي أن:

$$\hat{J}_a^b \text{ ق (س) دس} = \hat{J}_a^c \text{ ق (س) دس} + \hat{J}_c^b \text{ ق (س) دس}$$

"تفريق تكامل واحد الى عدة تكاملات"

وتسمى عكس عملية الاضافة بالتقسيم (المعنى المبسط لها).





## التكامل وتطبيقاته



مثال:

$$\text{إذا كان } \int_1^2 \frac{1}{x} dx = 5, \int_2^7 \frac{1}{x} dx = 9$$

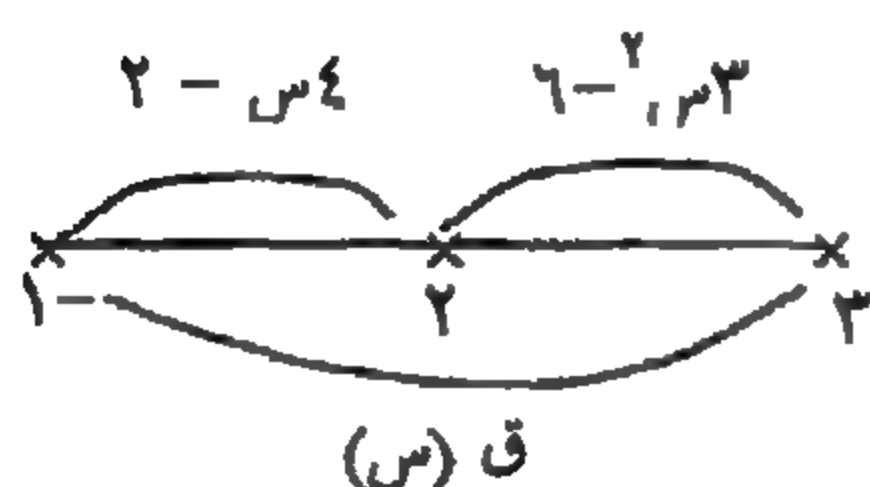
$$\text{فإن } \int_1^7 \frac{1}{x} dx = \int_1^2 \frac{1}{x} dx + \int_2^7 \frac{1}{x} dx = 5 + 9 = 14$$

مع ملاحظة أن عكس خاصية الاضافة (التقسيم تتطلب أن يكون نفس الاقتران، مع اختلاف قاعدتي التعريف، كما في الاقتران المتشعب والذي له قاعدتا تعريف، كونهما لاقتران واحد هو المتشعب كما يلي:

مثال:

$$\left. \begin{array}{l} \int_1^2 \frac{1}{x} dx = 2 - 1, \int_2^3 \frac{1}{x} dx = 3 - 2 \\ \int_3^6 \frac{1}{x} dx = 6 - 3 \end{array} \right\} \text{ إذا كان } \int_1^6 \frac{1}{x} dx = 6 - 1$$

$$\text{أوجد } \int_1^6 \frac{1}{x} dx$$



الحل:

$$\int_1^6 \frac{1}{x} dx = \int_1^2 \frac{1}{x} dx + \int_2^3 \frac{1}{x} dx + \int_3^6 \frac{1}{x} dx$$

"مع ملاحظة اختلاف القاعدتين لكنها لاقتران واحد"

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{1}{x} \right]_1^2 + \left[ \frac{1}{x} \right]_2^3 + \left[ \frac{1}{x} \right]_3^6 = \\ & \left[ \frac{1}{x} \right]_1^2 + \left[ \frac{1}{x} \right]_2^3 + \left[ \frac{1}{x} \right]_3^6 = \\ & 13 = (2 - 1) + (3 - 2) + (6 - 3) = \end{aligned}$$

ويمكن استخدام خاصية الاضافة وعكسها في تكاملات الاقترانات المتشعبة (المثال أعلاه) والتي لها أكثر من قاعدة واقترانان القيمة المطلقة واقترانان أكبر عدد صحيح "سُلمية أو درجية" وهكذا:





مثال:

أوجد  $\int_{1-}^2 |s+1| ds$  بعد إعادة تعريف الاقتران

حيث  $s+1 = \text{صفر} \leftarrow s = -1$  صفر الاقتران

كما في الشكل وهكذا:

$$\frac{s+1}{s+1} = \frac{s+1}{s+1} \quad \frac{s+1}{s+1} = \frac{s+1}{s+1}$$

$$\left. \begin{array}{l} s+1 = 0 \quad , \quad s = -1 \\ s+1 = 1 \quad , \quad s = 0 \end{array} \right\} = |s+1|$$

فإن  $\int_{1-}^2 |s+1| ds = \int_{1-}^2 (s+1) ds = \int_{1-}^2 s ds + \int_{1-}^2 1 ds$  د {الاقتران واحد وان  
اختلفت القاعدتان}

$$\frac{17}{2} = \left[ \frac{s^2}{2} + s \right]_{1-}^2 = \left[ \frac{s^2}{2} + s \right]_{1-}^2 = \frac{17}{2}$$

مثال:

$$\int_{1-}^2 [s] ds \quad \text{أوجد}$$

بعد إعادة التعريف:

$$\text{طول الدرجة} = \frac{1}{1} = \frac{1}{1}$$

وبعد ملاحظة أن إشارة s موجبة داخل القوس لذا فإننا نعوض الحد الأدنى

كون التعريف هكذا:

$$\left. \begin{array}{l} s = 2 \quad , \quad s = 2 \\ s = 3 \quad , \quad s = 3 \\ s = 4 \quad , \quad s = 4 \end{array} \right\} = [s]$$

ومنه  $\int_{1-}^4 [s] ds = \int_{1-}^2 2 ds + \int_2^3 3 ds + \int_3^4 4 ds$  أصبح السؤال تكاملات

اقترانات ثابتة



### التكامل وتطبيقاته



$$= 2(2 - 3) + 3(3 - 4) + 4(4 - 5)$$

$$= (2)(1) + (3)(1) + (4)(0) \text{ (صفر)}$$

$$= 2 + 3 = 5$$

مثال:

أوجد  $\int_2^4 f(x) dx$  حيث  $f(x)$  دالة متصلة على  $[2, 4]$  ونعوض الحد الأعلى  
كون التعريف:

$$f(x) = \begin{cases} 3 - x & \text{if } 2 \leq x < 3 \\ 4 - x & \text{if } 3 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

$$\int_2^4 f(x) dx = \int_2^3 (3 - x) dx + \int_3^4 (4 - x) dx$$

$$= \left[ 3x - \frac{x^2}{2} \right]_2^3 + \left[ 4x - \frac{x^2}{2} \right]_3^4$$

$$= \left( 9 - \frac{9}{2} \right) - \left( 6 - \frac{4}{2} \right) + \left( 16 - \frac{16}{2} \right) - \left( 12 - \frac{9}{2} \right)$$

(iii) خواص المقارنة Comparison Properties:

هذه الخواص مؤلفة من شقين:

الشق الأول: المقارنة بالاشارة سالبة أو موجبة.

ليكن  $f, g$  قابل للتكامل على  $[a, b]$  ، فإذا كان:

$f(x) \leq g(x)$  لكل  $x \in [a, b]$  ، فإن:

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

وإذا كان  $f(x) \geq g(x)$  لكل  $x \in [a, b]$  ، فإن:

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$$





## التكامل وتطبيقاته



والتفسير اللغوي لهذا الشق:

تكامل الاقتران الموجب  $\leftarrow$  موجب

وتكامل الاقتران السالب  $\leftarrow$  سالب

وبشكل عام: إن إشارة التكامل نفس إشارة الاقتران.

مثال:

ما إشارة كل من التكاملات التالية دون اجراء عملية التكامل ولو كانت

ممكنة؟

$$\int_0^1 \frac{s^2}{s^2 + 5} ds$$

بما أن إشارة التكامل هي نفس إشارة الاقتران، فإننا نجد إشارة الاقتران

هكذا:

إشارة البسط  $s^2$   $\frac{+++++}{1}$  كونها مربع كامل

إشارة المقام  $s^2 + 5$   $\frac{+++++}{1}$  كونها مربع كامل + عدد موجب

∴ إشارة ق (س) كخارج قسمة اشارتين موجبتين هي موجبة.

∴  $\int_0^1 \frac{s^2}{s^2 + 5} ds$  موجب لأن الاقتران موجب.

وبنفس الطريقة ما إشارة  $\int_1^2 \frac{s^2 - 5}{s^2 + 1} ds$  ؟

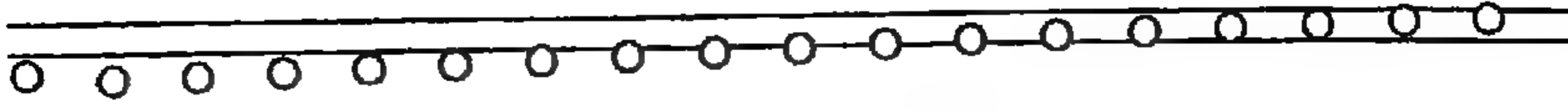
إشارة البسط:  $s^2 - 5 = 0$  صفر  $\leftarrow$   $s = \frac{5}{2}$  صفره

$\frac{s^2 - 5}{s^2 + 1}$  صفر الاقتران

إشارة المقام:  $\frac{+++++}{2}$



### التكامل وتطبيقاته



كونه مربع كامل وعدد موجب.

∴ إشارة الاقتران سالب.

أي أن  $\int_1^2 \frac{s^2 - 5}{s^2 + 1} ds$  سالب لأن إشارة الاقتران سالب.

الشق الثاني: المقارنة بين اقترانين.

ليكن ق (س) ، هـ (س) اقترانين قابلين للتكامل في [أ ، ب]

إذا كان ق (س) ≤ هـ (س) فإن  $\int_1^2 ق (س) ds \leq \int_1^2 هـ (س) ds$

أي أن تكامل الاقتران الأكبر ← أكبر، وتكامل الاقتران الأصغر ← أصغر

مثال:

$$\text{بين أن } \int_1^2 \frac{s^2}{s^2 + 1} ds \geq \frac{1}{2\sqrt{2}} > \frac{1}{4}$$

نحصر مقام الاقتران بين أصغر قيمة له وأكبر قيمة له.

لكل  $0 \leq s \leq 1$  فإن  $1 + s^2$  تتراوح بين

$$ق (0) = 1 + 0 = 1 ، ق (1) = 1 + 1 = 2$$

$$\text{أي أن } 1 \leq 1 + s^2 \leq 2$$

ومنها وبعد أخذ الجذر التربيعي  $1 \leq \sqrt{1 + s^2} \leq \sqrt{2}$

وبعد ضرب كل طرف بالحد  $s^2$  يتم تبديل الطرفين هكذا:

$$\frac{s^2}{1} \geq \frac{s^2}{\sqrt{1 + s^2}} \geq \frac{s^2}{\sqrt{2}}$$

(تبديل الطرفين لأنه عند قسمة  $s^2$  على الأطراف فالأصغر يصبح أكبر

والعكس صواب)





وبكامل جميع الأطراف:

$$\int_1^2 \frac{s^2}{2} ds \geq \int_1^2 \frac{s^2}{s+1} ds \geq \int_1^2 \frac{s^2}{1} ds$$

$$\left[ \frac{s^3}{3} \right]_1^2 \geq \int_1^2 \frac{s^2}{s+1} ds \geq \left[ \frac{s^3}{3} \right]_1^2$$

ومنه  $\frac{1}{3} \geq \int_1^2 \frac{s^2}{s+1} ds \geq \frac{1}{3}$  وهو المطلوب.

(iv) اللا تغير عند الانسحاب:

هذه الخاصية تتعلق بالاقتران الخطي الذي معامل  $s$  فيه وحدة واحدة أو

بجعل معامل  $s$  تساوي وحدة واحدة بعد اخراج المعامل كما يلي:

$$\int_1^2 (s) ds = \int_1^2 (s + 0) ds = \int_1^2 (s + 1 - 1) ds = \int_1^2 (s + 1) ds - \int_1^2 1 ds$$

والملاحظ أنه عندما يضاف الى الاقتران العدد الثابت  $j$  فإنه يطرح من

حديه "الحد الأعلى والحد الأسفل" هكذا:

$$\frac{65}{3} = \int_1^2 \frac{s^2}{3} ds = \int_1^2 \frac{s^2}{3} ds = \int_1^2 \frac{s^2}{3} ds = \int_1^2 \frac{s^2}{3} ds$$

وللتحقق من صحة الحل نك  $(s + 1)^2 = s^2 + 2s + 1 = s^2 + 2s + 1$

ثم تكامله:

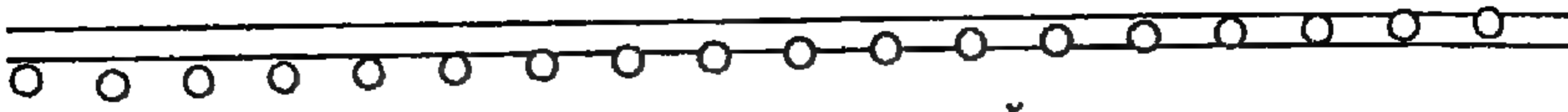
$$\int_1^2 (s^2 + 2s + 1) ds = \int_1^2 s^2 ds + \int_1^2 2s ds + \int_1^2 1 ds = \frac{65}{3}$$

مثال:

أو  $\int_1^2 (1 + s) ds$  هنا نجعل معامل  $s$  وحدة واحدة باخراج المعامل خارج القوى

$$\int_1^2 (1 + s) ds = \int_1^2 1 ds + \int_1^2 s ds = \left[ s \right]_1^2 + \left[ \frac{s^2}{2} \right]_1^2 = \frac{5}{2}$$





$$= \int_1^8 s^2 ds = \left[ \frac{s^3}{3} \right]_1^8 = 30$$

مثال:

$$\text{أوجد } \int_1^2 (s^2 - 2s + 1) ds$$

نحوه الى اقتران خطي هكذا:

$$\int_1^2 (s^2 - 2s + 1) ds = \int_1^2 (s^2 - 2s + 1) ds = \int_1^2 (s^2 - 2s + 1) ds$$

$$= \int_1^2 (s^2 - 2s + 1) ds = \left[ \frac{s^3}{3} - s^2 + s \right]_1^2 = \frac{1}{3}$$

(v) التكامل على نقطة Intergration on Point :

ومعناه عند اجراء تكامل محدود لاقتران قابل للتكامل ويكون حده

الأسفل = حده الأعلى = أ مثلاً.

$$\text{فإن } \int_a^b f(s) ds = F(b) - F(a) = \text{صفر}$$

$$\text{أي أن } \int_a^b f(s) ds = \text{صفر دائماً}$$

مثال:

$$\int_2^4 \frac{s^2}{2} ds = \left[ \frac{s^3}{6} \right]_2^4 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \text{صفر}$$

وبشكل عام:

$$\int_a^b \frac{s^u}{1+w} ds = \left[ \frac{s^{u+1}}{(u+1)(1+w)} \right]_a^b = \frac{b^{u+1} - a^{u+1}}{(u+1)(1+w)} = \text{صفر}$$

ولكن ليس معنى ذلك أنه اذا كانت قيمة التكامل = صفر فإنه تكامل

على نقطة أي عكس الخاصية ليس دائماً صواب.



مثال:

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$$

هذا ليس معناه - 1 = 1 بأي حال من الأحوال

أي أن  $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$  (س) د س = صفر لكن ليس العكس صواب دائماً:

أي إذا كان قيمة التكامل المحدود = صفر فليس معناه دائماً هو قيمة تكامل على نقطة "كما في المثال أعلاه".

والمثال التالي أيضاً:

مثال:

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$$

مبدئياً - بما أن التكامل = صفر - فإن الحد الأعلى = الحد الأسفل

أي أن  $\int_1^2 \frac{1}{x} dx = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$  ولكن هذا الجواب الوحيد لقيمة  $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$  لذا يجب الحل هكذا:

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$$

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$$

∴  $\int_1^2 \frac{1}{x} dx = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$  والجوابان صحيحان، تأكد من ذلك إذا أردت.

(vi) تبديل حدي التكامل المحدود:

إذا أردنا تبديل حدي التكامل المحدود - الأسفل بالأعلى والأعلى بالأسفل - يجب تغيير إشارة التكامل نفسه هكذا:





ليكن  $Q$  (س) اقتران قابل للتكامل في الفترة  $[a, b]$  فإن:

$$\int_a^b Q(s) ds = \int_a^b Q(s) ds - \int_a^b Q(s) ds$$

أي عند تبديل حدي التكامل يجب تغيير إشارة التكامل:

$$\text{وكذلك} \int_a^b Q(s) ds = - \int_b^a Q(s) ds$$

تستخدم هذه الخاصية بالتحديد في تغيير حدود التكامل عندما يكون الحد الأسفل للتكامل أكبر من الحد الأعلى له، لأنه يستحسن أن يكون الحد الأسفل أصغر من الحد الأعلى للتكامل.

وتفسيره سيوضح عند مناقشة المساحات.

مثال:

$$\text{إذا كان } \int_1^2 Q(s) ds = -10$$

$$\text{فإن } \int_2^1 Q(s) ds = - \int_1^2 Q(s) ds = -(-10) = 10$$

(٢٢ - ٣) المعادلات التفاضلية Differential Equations:

حتى نتم مفهوم التكامل بالذات، علينا أن نناقش مفهوماً هاماً في الرياضيات ويفرعه التفاضل والتكامل بالتحديد كونه يربط الأول (التفاضل) بالثاني (التكامل) فيما يسمى المعادلات التفاضلية:

المعادلة التفاضلية: هي المعادلة التي تشتمل على مشتقات  $(\frac{dv}{ds}, \frac{dv}{ds})$

أو تفاضلات  $(ds, dv)$  كل على انفراد.

حيث:  $\left. \begin{array}{l} dv \text{ تسمى تفاضله} \\ ds \text{ تسمى تفاضله} \end{array} \right\}$

$\left. \begin{array}{l} ds \text{ تسمى تفاضله} \\ dv \text{ تسمى تفاضله} \end{array} \right\}$  أكثر من ذلك لا نريد التوضيح



وإذا كانت المشتقات والتفاضلات لاقتزان في متغير واحد سُميت المعادلة التفاضلية العادية Ordinary وهذا النوع المناسب فقط في هذا المستوى والذي نريد مناقشته.

أما حل المعادلة التفاضلية فيمكن في إيجاد علاقة بين المتغيرات دون وجود المشتقات أو التفاضلات، ويتم ذلك بواسطة التكامل هكذا:

مثال:

حل المعادلة التفاضلية:

$$2 \text{ ص د ص} = 3 \text{ س}^2 \text{ د س}$$

بتكامل الطرفين  $\int 2 \text{ ص د ص} = \int 3 \text{ س}^2 \text{ د س}$

$$\therefore \frac{2 \text{ ص}^2}{2} = \frac{3 \text{ س}^3}{3} + \text{ج}$$

$$\text{ص}^2 = \text{س}^3 + \text{ج}$$

$$\text{ومنها ص} = \sqrt{\text{س}^3 + \text{ج}}$$

$$\therefore \text{ص} = \sqrt{\text{س}^3 + \text{ج}}$$

واعتماداً على حل المعادلة التفاضلية وبشكل عام يمكن مناقشة التطبيق الهندسي والتطبيق الفيزيائي للتكامل هكذا:

التطبيق الهندسي للتكامل: يعتمد على التكاملين التاليين:

$$\text{الأول: } \int \text{ق}(\text{س}) \text{ د س} = \text{ق}(\text{س})$$

$$\text{الثاني: } \int \text{ق}(\text{س}) \text{ د س} = \text{ق}(\text{س}) \text{ "عكس الاشتقاق"}$$

مثال:

أوجد قاعدة الاقتران ق(س) الذي يمر بمنحناه بالنقطة أ (- ٢ ، ٩) وحيث ميل المماس عند أي نقطة عليه هو (٣ س - ٢) (س + ٢).







الحل:

بما أن م المماس  $Q = (s)$

$$\therefore Q = (s) = (3s - 2)(2 + s)$$

$$\text{ومنها } Q = (s) = LQ = (s) \text{ دس} = \int (3s - 2)(2 + s) \text{ دس}$$

$$\text{أي أن } Q = (s) = \int (3s^2 + 4s - 2) \text{ دس}$$

$$\therefore Q = (s) = \frac{3s^3}{3} + \frac{4s^2}{2} - 2s + ج = s^3 + 2s^2 - 2s + ج$$

وبما أن  $Q = (s)$  يمر بمنحناه بالنقطة أ  $(-2, 9)$  فإن  $Q = (-2) = 9$

$$\text{ومنها } Q = (-2) = (-2)^3 + 2(-2)^2 - 2(-2) + ج = 9$$

$$\text{أي } 9 = 8 + 8 + 8 + ج$$

$$\therefore ج = 9 - 8 = 1$$

$$\therefore Q = (s) = s^3 + 2s^2 - 2s + 1 \text{ قاعدة الاقتتران.}$$

مثال:

إذا كانت النقطة أ  $(0, 1)$  نقطة حرجة لكثير الحدود  $Q = (s)$  وكانت

$$Q = (s) = 3s + 1 \text{ أوجد قاعدة } Q = (s).$$

بما أن  $LQ = (s) \text{ دس} = Q = (s)$

$$\text{فإن } \int (3s + 1) \text{ دس} = \frac{3s^2}{2} + s + ج = Q = (s)$$

وبما أن  $(0, 1)$  نقطة حرجة للاقتتران  $Q = (s)$  فإن  $Q = (0) = \text{صفر}$

(تعريف النقطة الحرجة)

$$Q = (0) = \frac{3(0)^2}{2} + 0 + ج = \text{صفر} \leftarrow ج = \text{صفر}$$

$$\therefore Q = (s) = \frac{3s^2}{2} + s$$





وبما أن  $Q(s) = D(s) = C(s)$

$$\therefore C(s) = \left( \frac{3}{2} s^2 + s \right) D(s)$$

$$C + \frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{2}s = D + \frac{s^2}{2} + \frac{s}{2} \times \frac{3}{2} =$$

وبما أن  $(0, 1)$  حرجة للاقتران  $C(s)$  فإنه يمر بها  $\leftarrow \therefore C(0) = 1$

$$C(0) = 1 = D(0) + \frac{1}{2}(0) + \frac{1}{2}(0) = D \leftarrow \therefore D = 1$$

$$\therefore C(s) = \left( \frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{2}s + 1 \right) D(s) \quad \text{قاعدة الاقتران.}$$

وأما التطبيق الفيزيائي للتكامل فيعتمد على التكاملين التاليين أيضاً:

الأول:  $E = D \cdot C$

"عكس الاشتقاق"

والثاني:  $E = D \cdot C$

حيث  $F =$  المسافة ،  $E =$  السرعة اللحظية ،  $T =$  التسارع

مثال:

إذا كانت العلاقة بين السرعة اللحظية  $E$  لجسيم يتحرك والزمن  $N$  هي:

$$E = 5N^3 + 3N$$

أوجد العلاقة بين المسافة والزمن إذا قطع الجسم  $2$  متر بعد ثانية من حركته.

$$\text{بما أن } F = E = D \cdot C = (5N^3 + 3N) D = \frac{3}{2}N^2 + N \quad \therefore D = \frac{3}{2}N^2 + N$$

وبعد ثانية واحدة فإن:

$$F = \frac{3}{2}(1)^2 + (1) = 2 \quad \text{مترًا بالزمن}$$

$$\therefore \text{ومنها } D = \frac{9}{2}$$



### التكامل وتطبيقاته



$$\therefore \text{ف} = \frac{3}{2} \text{ن}^2 + 5\text{ن} - \frac{9}{2}$$

هي العلاقة بين المسافة ف والزمن ن .

وبشكل عام وإيجاز هام فإن:

$$\text{ل} \dot{\text{ق}} (\text{س}) = \text{د} \text{س} = \text{ق} (\text{س})$$

أو ل م م س د س = ق (س) إذا جاز التعبير ولكنه في الرياضيات يجوز!

حيث ق (س) المشتقة الأولى، ق (س) الاقتران البدائي أو الأصلي.

وكذلك:

ل ع = د ن = ف حيث ع السرعة اللحظية ، ف المسافة.

وكذلك ل ق = د ن = ع حيث ت التسارع اللحظي.

مثال:

إذا كان تسارع جسيم ت بعد مرور ن من الثواني يعطى بالقاعدة  
 $\text{ف} = 6\text{ن} \text{ م} / \text{ث}^2$  فجد المسافة ف التي يقطعها الجسيم بعد مرور ن ثانية من بدء  
 الحركة. علماً بأن السرعة الابتدائية ع = ٠ م / ث وموقعه الابتدائي ف (٠) = ٥  
 متر.

$$\text{بما أن } \text{ل} \dot{\text{ع}} = \text{ل} \dot{\text{ت}} \text{ د ن} \leftarrow \text{فإن } \text{ل} \dot{\text{ع}} = 6\text{ن} \text{ د ن}$$

$$\therefore \text{ع} = 3\text{ن}^2 + \text{ج} \quad \text{وبما أن } \text{ع} (٠) = ٢$$

$$\therefore 3(٠)^2 + \text{ج} = ٢$$

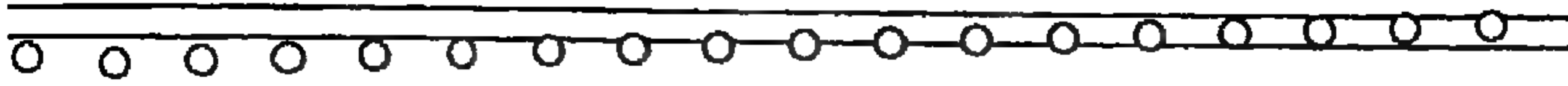
$$\therefore \text{ج} = ٢$$

$$\therefore \text{ع} = 3\text{ن}^2 + ٢ \text{ م} / \text{ث السرعة اللحظية}$$

$$\text{وبما أن } \text{ل} \dot{\text{ع}} = \text{د ن} = \text{ف} = \text{ل} (3\text{ن}^2 + ٢) \text{ د ن}$$



### التكامل وقطبيقاته



$$\therefore f = n^2 + 2n + ج$$

$$\text{وبما أن } f(0) = (0)^2 + 2(0) + ج = 0$$

$$\therefore ج = 0$$

$$\therefore f = n^2 + 2n + 0 \quad \text{قانون المسافة.}$$

مثال:

يتحرك جسيم بتسارع ثابت مقداره ٤ م/ث<sup>٢</sup> فإذا كانت سرعته اللحظية بعد ٢ ثانية من حركته تساوي ١٣ م/ث أوجد سرعته الابتدائية.

أي أن المطلوب (ع) أي عندما يكون ساكناً أو عندما  $n = 0$  صفر

$$\text{بما أن } ع = |ت د ن| = |٤ د ن| = ٤ ن + ج$$

$$\therefore ع = ٤ ن + ج$$

وبعد ٢ ثانية:

$$ع = |٤ (٢) + ج| = ١٣ \quad \text{كما هو معطى}$$

$$\therefore ج = ٥$$

$$\therefore ع = ٤ ن + ٥ \quad \text{السرعة اللحظية في أي لحظة}$$

$$\text{ومنها (ع) } ع = |٤ (٠) + ٥| = ٥ \text{ م/ث}$$

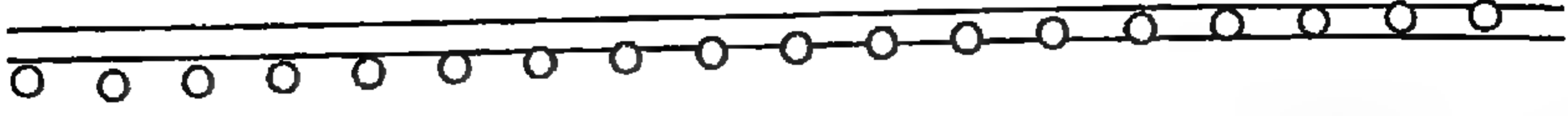
السرعة الابتدائية للجسيم.

(٢٢ - ٤) طرق التكامل:

حتى هذا الحد أصبح مفهوم التكامل واضحاً وبنوعيه المحدود وغير المحدود، والآن دعونا نناقش طرق التكامل وبنوعيه وعددها سبع طرق في هذه السطور:







## الطريقة الأولى:

### التكامل بالقانون Integration by Rule:

من طرق التكامل والتي تتعلق بالاقترانات الجبرية وعلى وجه الخصوص كثيرات الحدود. "وبعد أن اتضح أن التكامل نوعان محدود وغير محدود" فإن القانون له صيغتان هما:

#### صيغة القانون للتكامل غير المحدود:

$$\int u^a du = \frac{u^{a+1}}{a+1} + C, \quad a \neq -1$$

#### وصيغة القانون للتكامل المحدود:

$$\int_a^b u^a du = \left[ \frac{u^{a+1}}{a+1} \right]_a^b = \frac{b^{a+1} - a^{a+1}}{a+1} \quad \text{"كما مر سابقاً"}$$

#### مثال:

أوجد  $\int_1^5 x^2 dx$  ،  $\int_1^5 x^2 dx$

$$(1) \int x^2 dx = \frac{x^{2+1}}{2+1} = \frac{x^3}{3} + C$$

$$(2) \int_1^5 x^2 dx = \left[ \frac{x^3}{3} \right]_1^5 = \frac{5^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{125}{3} - \frac{1}{3} = \frac{124}{3}$$

هذا يستخدم القانون بصيغتيه (للتكامل غير المحدود والمحدود) لتكامل:

#### (i) كثيرات الحدود:

#### مثال:

$$\text{أو } \int (x^3 - 5x^2 + 3x - 2) dx = \frac{x^4}{4} - \frac{5x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 2x + C$$





مثال:

$$\int \left( \frac{x^2}{x^2} - \frac{x^2}{x^2} \right) dx = \int (1 - 1) dx = \int 0 dx = 0$$

$$= \int_0^2 (1 - 1) dx = \int_0^2 0 dx = 0$$

(ii) تكامل اقتران القيمة المطلقة كما في المثال:

$$\text{أوجد } \int_0^1 |x| dx = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \int_0^1 x dx = \frac{1}{2} \text{ ، } x > 0 \\ \int_0^1 (-x) dx = -\frac{1}{2} \text{ ، } x < 0 \end{array} \right\} =$$

ملحوظة:

مشتقة التكامل غير المحدود = ما بداخل القوس (الاقتران الأصلي).

$$\text{أي أن } \frac{d}{dx} \int (x^2 + 5) dx = x^2 + 5$$

لكن مشتقة التكامل المحدود = صفر

$$\text{أي أن } \frac{d}{dx} \int_0^1 (x^2 + 5) dx = 0$$

لذا يجب التمييز بينهما بكل دقة.

مثال:

$$\text{أوجد } \int_0^1 \pi dx = \pi \int_0^1 1 dx = \pi$$

أولاً:  $\int_0^1 \pi dx = \pi$  حيث  $\pi$  بالنسبة للتكامل عدد ثابت كونها ليست

من نوع التفاضلة  $\pi$

ثانياً: لكن  $\int_0^1 \pi dx = \pi$  حيث  $\pi$  بالنسبة للتكامل هي

متغير كونها من نوع التفاضلة  $\pi$





## الطريقة الثانية:

### تكامل الاقترانات الدائرية The Trigonometric Integration:

نعمد في ايجاد تكاملات الاقترانات الدائرية على مشتقاتها كون التكامل عملية عكسية للتفاضل.

لذا سنعرض مشتقات الاقترانات الدائرية كما مرت في حساب التفاضل واعتماداً عليها سنجد تكامل الاقترانات الدائرية كما يلي:

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x \quad \leftarrow \text{لأن } (\sin x)' = \cos x$$

$$\text{وكذلك } \frac{d}{dx} \cos x = -\sin x \quad \leftarrow \text{لأن } (\cos x)' = -\sin x$$

وهكذا سنتوصل الى جدول التكاملات التالي:

باعتبار التكامل عكس التفاضل، فعملية ايجاد التكامل تعاكس عملية ايجاد التفاضل هكذا:

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x \quad \leftarrow \text{لأن } (\sin x)' = \cos x$$

$$\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x \quad \leftarrow \text{لأن } (\cos x)' = -\sin x$$

$$\frac{d}{dx} \sin^2 x = 2 \sin x \cos x \quad \leftarrow \text{لأن } (\sin^2 x)' = 2 \sin x \cos x$$

$$\frac{d}{dx} \cos^2 x = -2 \cos x \sin x \quad \leftarrow \text{لأن } (\cos^2 x)' = -2 \cos x \sin x$$

$$\frac{d}{dx} \sin x \cos x = \cos^2 x - \sin^2 x \quad \leftarrow \text{لأن } (\sin x \cos x)' = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\frac{d}{dx} \sin x \sin x = \cos^2 x \quad \leftarrow \text{لأن } (\sin^2 x)' = 2 \sin x \cos x$$

ملحوظة جديرة بالاهتمام:

يمكن ايجاد  $\int \sin x \cos x dx$  ،  $\int \sin^2 x dx$  ،  $\int \cos^2 x dx$  ،  $\int \sin x \sin x dx$  ، ليس الآن بل بعد طريقة تكامل الاقتران اللوغارتمي "لذا وجب التويه!!".



وبعد الاستعانة بالمتطابقات المثلثية (الدائرية) الأساسية يمكن حل الأمثلة

التالية:

مثال:

أوجد  $\int \sin^2 x \cos x \, dx$  "هذا التكامل ليس موجوداً بجدول التكاملات" لذا  
وجب تبديله بما يكافئه من جدول التكاملات هكذا:

نحن نعلم أن  $\frac{1}{\sin^2 x} = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x}$  متطابقة مثلثية مشهورة جداً  
وبعد القسمة على  $\sin^2 x$

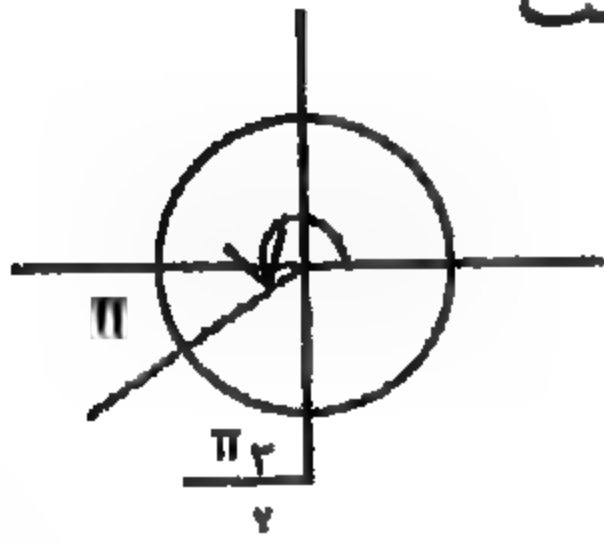
$$\text{ومنها: } \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$\therefore \int \sin^2 x \cos x \, dx = \int (1 - \cos^2 x) \cos x \, dx = \int \cos x \, dx - \int \cos^3 x \, dx$   
جدول التكاملات

مثال:

أوجد  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x \, dx$  ، حيث  $\pi$  تقع في الربع الثالث



$\left. \begin{array}{l} \text{جاس} , 0 \leq \pi < 180^\circ \text{ (الربع الأول والثاني) القاعدة الأولى} \\ \text{جاس} - , 180^\circ \leq \pi < 360^\circ \text{ (الربع الثالث والرابع) القاعدة الثانية} \end{array} \right\} = |\text{جاس}|$

هنا نأخذ القاعدة الثانية كون تقع في الربع الثالث:

$$\text{أي أن } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x) \, dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx$$

$$= -\left[ \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -(\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0) = -1$$







مثال:

حل المعادلة التفاضلية  $\frac{دص}{دس} = \frac{س}{جتا ص}$  بالضرب التبادلي

جتا ص د ص = س د س وبكامل الطرفين

أجتا ص د ص = أ س د س

ومنها جا ص =  $\frac{1}{2} س + ج$

مثال:

إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق (س) هو ٢ جتاس + جا س وكان منحنى ق (س) يمر بالنقطة (٢ ، ٠) أوجد قاعدة الاقتران ق (س).

بما أن م المماس = ق (س) = ٢ جتاس + جا س

فإن ق (س) = أ ق (س) د س = أ (٢ جتاس + جا س) د س

∴ ق (س) = ٢ جا س - جتاس + ج

وبما أن ق (س) يمر بالنقطة (٢ ، ٠) فإن ق (٠) = ٢

أي أن ٢ جا صفر - جتاس صفر + ج = ٢

صفر - ١ + ج = ٢

ومنها ج = ٣

∴ ق (س) = ٢ جا س - جتاس + ٣ قاعدة الاقتران.

الطريقة الثالثة:

التكامل بالتعويض Integration by Substitution :

يمكن ايجاد أ (٢ س + ١) د س بالقانون هكذا:  $\frac{٢}{٢} س^٢ + س + ج = س^٢ + س + ج$



ويمكن إيجاد  $\int (1 + s^2)^2$  بعد فك القوس وبالقانون هكذا:

$$\int (1 + s^2 + s^4 + s^6) ds = \int 1 ds + \int s^2 ds + \int s^4 ds + \int s^6 ds$$

$$= s + \frac{s^3}{3} + \frac{s^5}{5} + \frac{s^7}{7} + C$$

ثم إيجاد  $\int (1 + s^2)^3$  بعد فك القوس وبالقانون هكذا:

$$\int (1 + s^2 + s^4 + s^6 + s^8 + s^{10} + s^{12}) ds = \int 1 ds + \int s^2 ds + \int s^4 ds + \int s^6 ds + \int s^8 ds + \int s^{10} ds + \int s^{12} ds$$

$$= s + \frac{s^3}{3} + \frac{s^5}{5} + \frac{s^7}{7} + \frac{s^9}{9} + \frac{s^{11}}{11} + \frac{s^{13}}{13} + C$$

$$= s + \frac{s^3}{3} + \frac{s^5}{5} + \frac{s^7}{7} + \frac{s^9}{9} + \frac{s^{11}}{11} + \frac{s^{13}}{13} + C$$

ومن الصعب إيجاد  $\int (1 + s^2)^{10}$  دس بنفس الأسلوب، ولكن ليس مستحيلاً باستخدام نظرية ذات الحدين وبما أن العملية طويلة وتستغرق وقتاً كبيراً وشاقة تتطلب جهداً عسيراً وعلى وجه الخصوص إذا كان أس القوس عدداً كبيراً أو سالباً وتستحيل عملية الضرب تماماً وفك الأقواس إذا كان الأس نسبياً.

لذلك يبرز السؤال، كيف يمكن إجراء التكاملات التالية:

$$\int (1 + s^2)^{10} ds، \int (1 + s^2)^{-17} ds، \int (1 + s^2)^{\frac{1}{2}} ds \text{ وأشباهها؟}$$

لهذا السبب نستخدم بعض الأساليب الأخرى والتي بواسطتها تحويل المقدار الجبري داخل القوس الى صورة تكافئه وبسيطه كحد واحد مشابه للصورة  $q(s) = s^n$  بحيث يسهل تكاملها، ومن هذه الأساليب "التكامل بالتعويض".

والجدير بالذكر أن هذه الطريقة تستخدم لتكامل حاصل ضرب اقترانين

من نفس النوع شرط أن يظهر أحدهما في مشتقه الثاني كما في الأمثلة التالية:





مثال:

أوجد  $\int$  جتا  $s$  د  $s$

بما أن جتا  $s$  تظهر في مشتقة جتا  $s$  فإننا:

نفرض أن  $v = \text{جتا } s$

ومنها  $\frac{dv}{ds} = \frac{\text{جتا } s}{1}$  وبالضرب التبادلي

$$\text{جتا } s \, ds = 1 \, dv$$

$$\therefore ds = \frac{1}{\text{جتا } s} dv$$

نعود الى السؤال:  $\int$  جتا  $s$  د  $s = \int v \times \text{جتا } s \times \frac{1}{\text{جتا } s} dv$

$$= \int v \, dv = \frac{v^2}{2} + C$$

ثم نعيد فيه  $v = \text{جتا } s$

$$\therefore \int \text{جتا } s \, ds = \frac{(\text{جتا } s)^2}{2} + C = \frac{1}{2} \text{جتا}^2 s + C$$

مثال:

أجر التكامل  $\int (1 + s)^2 \, ds$

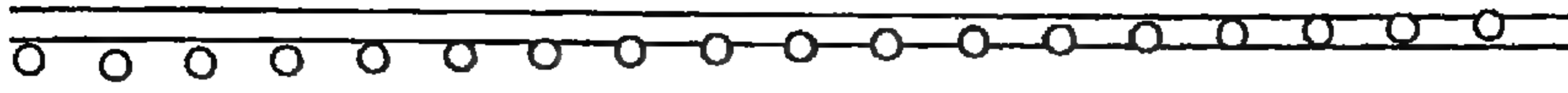
نفرض أن ما بداخل القوس  $= v$

$$\therefore v = 1 + s \quad \text{وباشتقاق الطرفين لاستبدال } ds \text{ بد } dv \text{ هكذا:}$$

$$\frac{dv}{ds} = \frac{2}{1} \leftarrow 2 \, ds = 1 \, dv \leftarrow ds = \frac{1}{2} dv$$

$$\int (1 + s)^2 \, ds = \int v^2 \times \frac{1}{2} dv = \frac{1}{2} \int v^2 dv$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{v^3}{3} + C = \frac{1}{6} (1 + s)^3 + C$$



ملحوظة:

ويمكن اجراء تكامل الاقتران الخطي فقط مرفوعاً لأي قوة مثل ن

مباشرة هكذا:

$$\int (أ س + ب) د س = \frac{1}{أ} \times \frac{(أ س + ب)^{ن+1}}{ن+1} + ج$$

ومثاله:

$$\int (٢ س + ٥) د س = \frac{1}{٢} \times \frac{(٢ س + ٥)^{١٨}}{١٨} + ج$$

$$= \frac{1}{٣٦} (٢ س + ٥)^{١٨} + ج$$

مثال:

$$\text{أوجد } \int \frac{1}{\sqrt{١+٢س}} د س$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{١+٢س}} د س = \int \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{٢}(١+٢س)}} د س = \int \frac{1}{\sqrt{١+٢س}} د س$$

$$\text{ومباشرة لأنه خطي} \int \frac{1}{\sqrt{١+٢س}} د س = \int \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{٢}(١+٢س)}} د س = \int \frac{1}{\sqrt{١+٢س}} د س$$

$$= \frac{1}{٢} \times \frac{٢}{١} \sqrt{١+٢س} = \sqrt{١+٢س} = ١ - ٣ = ٢$$

مثال:

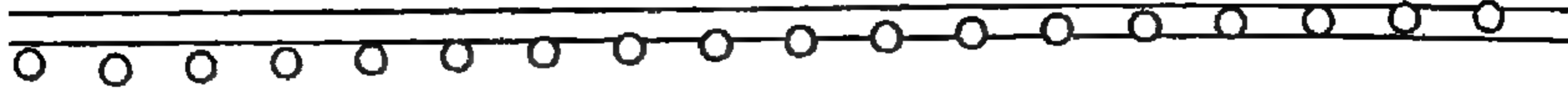
أوجد أجتا ٥ س د س .

$$\text{نفرض أن ص} = ٥ س \leftarrow \frac{د ص}{د س} = \frac{٥}{١} \leftarrow د س = \frac{1}{٥} د ص$$

$$\text{ومنها أجتا ٥ س د س} = \frac{1}{٥} \int \text{أجتا ص د ص} = \frac{1}{٥} \times \text{جا ص} + ج$$



### التكامل وتطبيقاته



$$= \frac{1}{5} \text{ جا } 5 \text{ س } + \text{ ج}$$

وهذه النتيجة تؤدي الى قاعدة عامة في تكامل الاقترانات الدائرية المركبة، مباشرة عندما يكون معامل الزاوية أكبر من ١. هكذا:

$$\text{أ جا } (أ \text{ س } + ب) \text{ د س} = \frac{1}{\text{معامل الزاوية}} \times (\text{جتا } (أ \text{ س } + ب)) + \text{ج}$$

$$= - \frac{1}{أ} \text{ جتا } (أ \text{ س } + ب) + \text{ج}$$

$$\text{وكذلك أ جتا } (أ \text{ س } + ب) \text{ د س} = \frac{1}{أ} \text{ جا } (أ \text{ س } + ب) + \text{ج}$$

أو بالتعويض

مثال:

أوجد أ جا ٧ س د س مباشرة.

$$\text{أ جا } ٧ \text{ س د س} = \frac{1}{\text{معامل الزاوية}} \times (- \text{جتا } ٧ \text{ س}) + \text{ج}$$

$$= - \frac{1}{٧} \text{ جتا } ٧ \text{ س} + \text{ج}$$

وجاء الآن دور تكامل الاقترانات الدائرية المرفوعة لأسس، مثل كيف

تكامل:

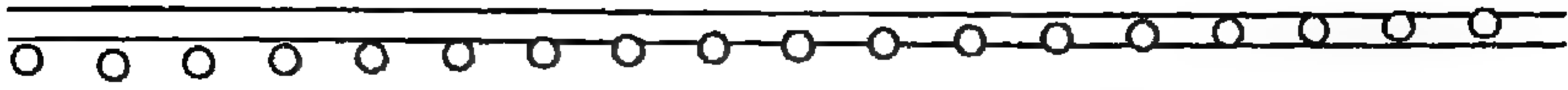
$$\text{أ جا } ٥ \text{ س د س} \quad \text{وكذلك أ جتا } ٥ \text{ س د س} ؟$$

الجواب:

نذيب القوى أو الأسس كلياً أو جزئياً ثم نستخدم طريقة التكامل بالقانون

أو بالتعويض حسب المطلوب.

ولتذويب الأسس أو القوى نستخدم المتطابقين:



الأولى:  $\text{جا}^2 \text{س} + \text{جتا}^2 \text{س} = 1$  للاذابة الجزئية عندما ن عدد فردي.

والثانية:  $\text{جتا}^2 \text{س} = \text{جتا}^2 \text{س} - \text{جا}^2 \text{س}$

$$\text{أو } 2 = \text{جتا}^2 \text{س} - 1$$

$$\text{أو } 1 - 2 = \text{جا}^2 \text{س} \quad \text{للاذابة الكلية عندما ن عدد زوجي}$$

كما في الأمثلة:

مثال:

أجر  $\int \text{جا}^2 \text{س} \text{ د س}$  هنا نذيب الأس كلياً من المتطابقة الثانية.

$$\text{جتا}^2 \text{س} = 1 - 2 = \text{جا}^2 \text{س} \leftarrow 2 = \text{جتا}^2 \text{س} - 1$$

$\text{جا}^2 \text{س} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \text{جتا}^2 \text{س}$  "عندما تكون القوة أو الأس زوجية نذيبها كلياً باستخدام  $\text{جتا}^2 \text{س}$ "

$$\therefore \int \text{جا}^2 \text{س} \text{ د س} = \int \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \text{جتا}^2 \text{س} \right) \text{ د س}$$

$$= \frac{1}{2} \text{س} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \text{جا}^2 \text{س} + \text{ج}$$

$$= \frac{1}{2} \text{س} - \frac{1}{4} \text{جا}^2 \text{س} + \text{ج}$$

مثال:

أجر  $\int \text{جتا}^2 \text{س} \text{ د س}$

نبسطها هكذا  $\int \text{جتا}^2 \text{س} \text{ د س} = \int \text{جتا}^2 \text{س} \text{ د س}$

وهنا القوة فردية نذيبها جزئياً من  $\text{جا}^2 \text{س} + \text{جتا}^2 \text{س} = 1$

$$\therefore \int \text{جتا}^2 \text{س} = 1 - \text{جا}^2 \text{س} \text{ د س} \text{ وذلك بجعل أحد الاقترانين يظهر في مشتقه الآخر}$$

هكذا:





∴  $ك جتا^٢ س د س = ك جتا س (١ - جا^٢ س) د س$

$$= ك (جتا س - جتا س جا^٢ س) د س$$

$$= جا س - ك جتا س جا^٢ س د س \dots (١)$$

وباستخدام التعويض  $ك جتا س جا^٢ س د س = \frac{١}{٣} جا^٢ س + ج$

بعد فرض  $ص = جا س$

∴  $ك جتا^٢ س د س = نعوض في \dots (١)$

$$= جا س - \left( \frac{١}{٣} جا^٢ س + ج \right)$$

$$= جا س - \frac{١}{٣} جا^٢ س + ج$$

ملحوظة:

ملخص مفيد بالرموز: لإذابة القوى نستخدم

عندما ن فردية نستخدم اذابة جزئية

$$من جا^٢ س + جتا^٢ س = ١$$

عندما ن زوجية نستخدم اذابة كلية

$$من جتا^٢ س = جتا^٢ س - جا^٢ س$$

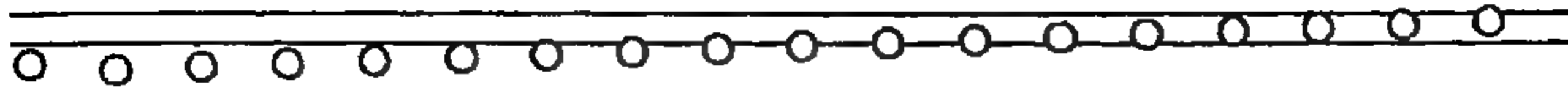
$$٢ جتا^٢ س - ١ =$$

$$١ - ٢ جا^٢ س =$$

وكذلك جتا^٣ س د س وينفس الأسلوب.

مثال:

أوجد  $\int \sqrt{٢ + س^٢} د س$



$$= \int \frac{1}{x^3} \sqrt{x} dx$$

$$= \int \frac{1}{x^3} \sqrt{x^2} dx$$

$$= \int \frac{1}{x^3} \sqrt{x^2} dx$$

لكن  $x^2 = 2 + x^2$  بالفرض

$$\therefore x^2 = 2 - x^2$$

$$\therefore \int \frac{1}{x^3} \sqrt{x^2} dx$$

$$= \int \frac{1}{x^3} (2 - x^2) \sqrt{x} dx$$

$$= \int \frac{1}{x^3} (2 - x^2) \sqrt{x} dx$$

$$= \int \frac{1}{x^3} (2 - x^2) \sqrt{x} dx$$

$$= \int \frac{1}{x^3} \left[ 2 - \frac{2}{x^2} \right] \sqrt{x} dx$$

$$= \int \frac{1}{x^3} \left[ 2 - \frac{2}{x^2} \right] \sqrt{x} dx$$

$$= \int \frac{1}{x^3} \left[ 2 - \frac{2}{x^2} \right] \sqrt{x} dx$$

$$= \int \frac{1}{x^3} \left[ 2 - \frac{2}{x^2} \right] \sqrt{x} dx$$

نفرض  $x^2 = 2 + x^2$

$$\frac{x^2}{1} = \frac{dx}{dx}$$

$$x^2 \cdot dx = 1 \cdot dx$$

$$\boxed{dx = \frac{1}{x^3} dx}$$

الطريقة الرابعة:

التكامل بالأجزاء Integration by Parts:

انها طريقة عامة للتكامل ولحاصل ضرب اقترانين وان كانا مختلفين

بالنوع دون مقدمات، ندون القاعدة التالية والمسماة:



## قاعدة التكامل بالأجزاء:

والمتعلقة بالاقترانين ق (س) ، هـ (س) القابلين للتكامل:

$$أق \cdot ده = ق \cdot هـ - أ هـ \cdot دق \quad \text{حيث هـ (س) دس = ده}$$

$$ق (س) دس = دق$$

وهكذا فلتكامل الأجزاء ننتج تكامل آخر، لذا وجب التنويه والاستمرار بالتكامل حتى النهاية.

والتفسير لغوياً:

$$أق (س) \cdot مشتقة هـ (س) = ق (س) \cdot هـ (س) - أ هـ (س) \cdot مشتقة ق (س).$$

مثال:

أوجد أس جا س دس

"مع ملاحظة أن ايجاد التكامل بالتعويض مستحيل كون أحدهما لا يظهر في مشتقه الآخر بأي حال من الأحوال لأن الاقترانين س ، جا س ليسا من نوع واحد كما ترى".

$$\begin{aligned} \text{نفرض س} = ق & \quad \text{كما نفرض أ هـ} = أ جا س دس \\ \therefore دس = دق & \quad \text{هـ} = - جتا س \end{aligned}$$

نطبق القاعدة:

$$أس جا س دس = ق \cdot هـ - أ هـ \cdot دق \cdot س (- جتا س) - أ - جتا س دس$$

$$= - س جتا س + أ جتا س دس = - س جتا س + جا س + ج$$





مثال:

أوجد  $\int (1+s)^{\frac{1}{2}} ds$

ق = س  $\int (1+s)^{\frac{1}{2}} ds =$  د هـ

$$\frac{2}{3} (1+s)^{\frac{3}{2}} = \frac{(1+s)^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{2}} = \text{هـ} \quad \text{د ق} = \text{د س}$$

ومنها:

$$\int (1+s)^{\frac{1}{2}} ds = \frac{2}{3} (1+s)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3} \int (1+s)^{\frac{1}{2}} ds$$

$$\frac{2}{3} \sqrt{1+s} = \frac{2}{3} \sqrt{1+s} - \frac{2}{3} \sqrt{1+s} + \frac{2}{3} \sqrt{1+s} =$$

بعد التعويض والتبسيط

ملحوظة:

حتى لا نختار عند اختيار أي من الاقترانين ليكون ق وأيها ليكون د هـ:

الاقتران سهل الاشتقاق افرضه ق لأننا نريد مشتقته.

والاقتران سهل التكامل افرضه د هـ لأننا نريد تكامله.

وهذا لا يمنع أن التكامل بالاجزاء يمكن أن يستمر بنفس السؤال لأكثر من مرة

واحدة كما في المثال:

مثال:

أوجد  $\int s^2 \cos s ds$

افرض ق =  $s^2$   $\int s^2 \cos s ds =$  د هـ =  $\int \cos s ds$

د ق =  $s^2 \sin s$  هـ =  $\sin s$



∴  $\sqrt{s}$  جتا  $s$  د  $s = s^2$  جاس -  $\sqrt{s}$  جاس  $\times s$  د  $s$

$$= s^2 \text{ جاس} - \sqrt{s} \text{ جاس د } s \times s \text{ د } s \quad (1)$$

ثم نكامل  $s$  جاس د  $s$  بالأجزاء مرة أخرى كما مرّ سابقاً

لتكون  $\sqrt{s}$  جاس د  $s = s$  جتا  $s + s$  جاس + جـ

وبعد التعويض في (1)

$$\text{ومنها } \sqrt{s} \text{ جتا } s \text{ د } s = s^2 \text{ جاس} + s \text{ جتا } s - \sqrt{s} \text{ جاس} + جـ$$

بعد التكامل بالأجزاء مرتين،

ملحوظة:

ما العلاقة بين طريقتي التكامل بالتعويض والتكامل بالأجزاء؟ ومتى يمكن استخدام كل منهما؟

تعتبر طريقتا التعويض والأجزاء من الطرق العامة لتكامل حاصل ضرب اقترانين ولكن طريقة التعويض مشروطة بأن يظهر أحد الاقترانين في مشتقة الآخر، لذا يجب أن يكون الاقترانان من نوع واحد كأن يكونا جبريان أو دائريان. ولكن طريقة الأجزاء لا شرط لها على الإطلاق، لذلك فهي أكثر عمومية من طريقة التعويض.

وأخيراً يمكن أن تشترك الطريقتان معاً في سؤال واحد كما في المثال:

مثال:

أوجد  $\int \sqrt{s} \text{ جاس د } s$

أولاً: نبدأ بالتعويض:  $\sqrt{s} = v$

$$\frac{1}{\sqrt{s}} = \frac{d v}{d s} \quad \leftarrow \quad d s = \sqrt{s} \text{ جاس د } s$$

$$\leftarrow \quad d s = 2 v \text{ د } v$$



$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

وبتكامل  $\sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$  بالأجزاء مرة أخرى كما مرّ سابقاً

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b u dv = \frac{1}{2} u^2 - \frac{1}{2} v^2 + C$$

$$\therefore \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{2} u^2 - \frac{1}{2} v^2 + C$$

الطريقة الخامسة:

تكامل الاقتران اللوغارتي الطبيعي  $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$

نعود ثانية الى القانون العام لتكامل الاقترانات الجبرية وهو:

$$\int \frac{x^m}{x^n + 1} dx = \frac{1}{n} \ln|x^n + 1| + C, \quad n \neq -1$$

التفسير عندما  $n = -1$  هنا تكمن المشكلة:

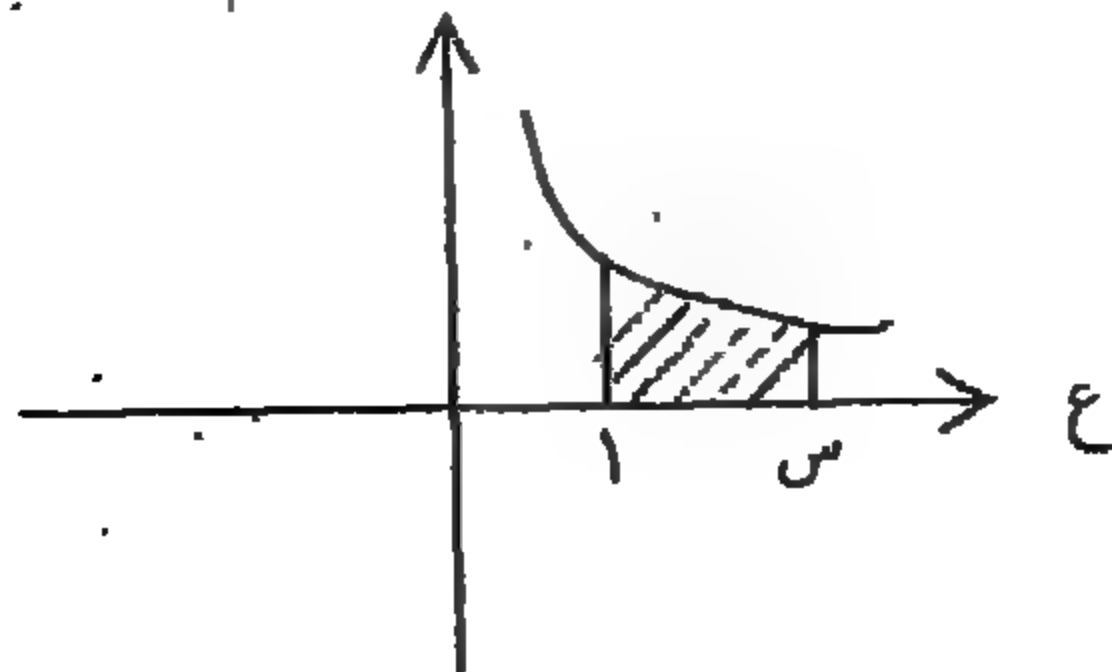
$$\int \frac{x^m}{x^n + 1} dx = \frac{1}{n} \ln|x^n + 1| + C$$

والمقدار  $\frac{x^m}{x^n + 1}$  غير معرف اطلاقاً كون المقام = صفر

والسؤال الآن: كيف يمكن ايجاد  $\int \frac{1}{x} dx$  ؟

والجواب: لايجاد  $\int \frac{1}{x} dx$  لا بُد من تعريف اقتران جديد كما يلي:

ليكن  $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$  والممثل منحناه بالشكل:



## التكامل وتطبيقاته



والمنطقة المظللة فيه والمحصورة بين  $\frac{1}{e} = \frac{1}{e}$  ومحور العينات والمستقيمين  $e = 1$  ،  
 $e = s$  حيث  $s < 1$  هي  $\int \frac{1}{e} ds$  د  $e$  ويسمى هذا الاقتران بالاقتران الذي متغيره  
 الحد الأعلى اقتران لوغاري.

طبيعي ويرمز له بالرمز  $\log s$

$$\text{أي أن } \int \frac{1}{e} ds = \log s$$

ويمكن كتابة التكامل التالي مباشرة:

$$\int \frac{1}{s} ds = \log s + C \quad (1)$$

حيث البسط (1) هو مشتقة المقام (s) وهذه الحالة الخاصة للتكامل.

وبشكل عام فإن:

$$\int \frac{q(s)}{p(s)} ds = \log p(s) + C \quad \text{وهي الحالة العامة للتكامل.}$$

مثال:

$$\int \frac{s^2}{s^2 + 5} ds = \log(s^2 + 5) + C \quad \text{لأن البسط مشتق المقام}$$

$$\text{وكذلك } \int \frac{s^2}{s^2 + 7} ds = \frac{1}{3} \int \frac{s^3}{s^2 + 7} ds \quad \text{حيث جعلنا البسط = مشتق المقام}$$

$$= \frac{1}{3} \log(s^2 + 7) + C$$

وبشكل خاص يمكن ايجاد تكامل مقلوب الاقتران الخطي كما يلي:

"أو بالتعويض"

$$\int \frac{1}{as + b} ds = \frac{1}{a} \log(as + b) + C$$

$$\text{حيث جعلنا البسط مشتقة المقام: } \int \frac{1}{as + b} ds = \frac{1}{a} \log(as + b) + C$$

$$= \frac{1}{a} \log(as + b) + C$$





مثال:

$$\int \frac{1}{2+s} ds = \frac{1}{3} \log(2+s) + C \quad \text{"أو التعويض"}$$

مثال:

أوجد  $\int \log s \, ds$  ،  $s > 0$   
 وهذا ممكن وضعه هكذا  $\int (1) \log s \, ds$  ،  $s > 0$   
 هنا التكامل بالأجزاء.

ق =  $\log s$  لأنه سهل الاشتقاق  $d \log s = \frac{1}{s} ds$  لأنه سهل التكامل

$$d \log s = \frac{1}{s} ds \quad \text{هـ} = \frac{1}{s}$$

وبتطبيق قاعدة الأجزاء:

$$\int \log s \, ds = s \log s - \int \frac{s}{s} ds$$

$$\text{أي أن } \int (1) \log s \, ds = s \log s - \int \frac{1}{s} ds$$

$$= s \log s - \int \frac{1}{s} ds = s \log s - \log s + C$$

$$= s \log s - \log s + 1 + C$$

$$= s \log s - \log s + 1 + C$$

والآن يمكن إيجاد تكاملات الاقترانات الدائرية التالية:

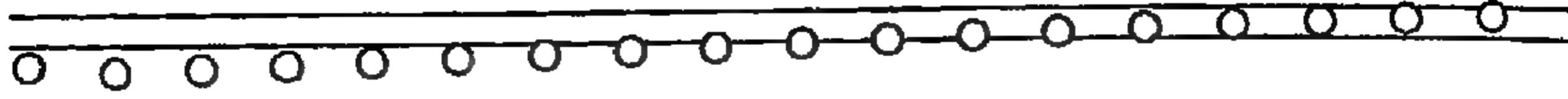
$$Q_1(s) = \arcsin s$$

$$Q_2(s) = \arctan s$$

$$Q_3(s) = \arccos s$$



### التكامل وتطبيقاته



ق، (س) = قتا س هكذا

لذا س د س =  $\int \frac{جاس}{جتاس} د س$  ولأن البسط يظهر في مشتقة المقام

فإن  $\int \frac{جاس - لوم جتاس}{جتاس} د س = - لوم جتاس + ج$

وكذلك  $\int \frac{جتاس}{جاس} د س = لوم جاس + ج$

لكن  $\int قاس د س = \int قاس \left( \frac{قاس + ظاس}{قاس + ظاس} \right) د س$  بعد ضرب البسط والمقام \*  
(قاس + ظاس)

$\int \frac{قاس^2 + قاس ظاس}{قاس + ظاس} د س$  فأصبح البسط مشتقه المقام

= لوم (قاس + ظاس) + ج

وكذلك  $\int \frac{قنا س (قنا س + ظنا س)}{قنا س + ظنا س} د س$  بعد ضرب البسط والمقام \*  
(قنا س \* ظنا س)

= فأصبح البسط ومشتقه المقام

∴  $\int قنا س د س = لوم (قنا س + ظنا س) + ج$

### الطريقة السادسة:

"تكامل الاقتران الأسّي الطبيعي" ص = هـ :

انه الاقتران الأسّي الطبيعي ص = هـ حيث هـ العدد النامبيري كما مرّ سابقاً.

والآن  $\int هـ د س = هـ + ج$  الاقتران نفسه وهذه حالة خاصة



وبشكل عام:

$$\int \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{x} \right) dx = \frac{1}{x} + C$$

وهذه حالة عامة.

مثال:

أوجد  $\int \frac{1}{x^2} dx$  باستخدام القانون لأن المعامل هو مشتقة الأس.

$$\int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2} dx = \frac{x^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{x} + C$$

وكذلك  $\int \frac{1}{x^5} dx$  نجعله بصورة المعامل مشتقة الأس هكذا:

$$\int \frac{1}{x^5} dx = \int x^{-5} dx = \frac{x^{-4}}{-4} + C = -\frac{1}{4x^4} + C$$

وفي هذا السياق لا بد من توضيح التكامل المتكرر أو تكرار التكامل Frequent Integration انه تكامل يتكرر بنفس الكيفية ولا يمكن التوصل الى نهاية له على الاطلاق كما في المثال:

أوجد  $\int \frac{1}{x} dx$  ، بالأجزاء كما يلي:

$$\text{نفرض: } \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$$

$$\text{دق} = \frac{1}{x^2}$$

$$\text{ونفرض: } \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2}$$

$$\text{هـ} = -\frac{1}{x}$$

وبتطبيق القاعدة:

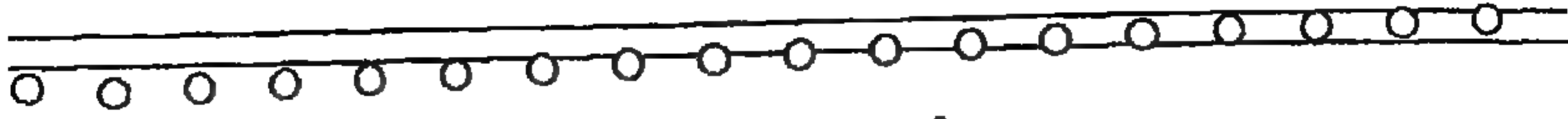
$$\int \frac{1}{x} dx = \frac{1}{x} + C$$

$$\text{فإن } \int \frac{1}{x} dx = \frac{1}{x} + C = \frac{1}{x} + C$$

$$= -\frac{1}{x} + C = -\frac{1}{x} + C$$



## التكامل وتطبيقاته



ثم نكرر الأجزاء ثانياً لتكامل  $\int_s^s$  جتا  $s$  د  $s$

$$ق = \int_s^s \quad \int_s^s = \int_s^s$$

$$د ق = \int_s^s \quad \int_s^s = \int_s^s$$

$$\therefore \int_s^s \text{ جتا } s \text{ د } s = - \int_s^s \text{ جتا } s + \int_s^s \text{ جتا } s - \int_s^s \text{ جتا } s \text{ د } s$$

$$\therefore \int_s^s \text{ جتا } s \text{ د } s = - \int_s^s \text{ جتا } s + \int_s^s \text{ جتا } s - \int_s^s \text{ جتا } s \text{ د } s$$

ومن الملاحظ أننا انتهينا من حيث بدأنا، لذا لا نكرر التكامل إطلاقاً بل

بنسب هكذا:

$$\int_s^s \text{ جتا } s \text{ د } s + \int_s^s \text{ جتا } s = \int_s^s \text{ جتا } s - \int_s^s \text{ جتا } s \text{ د } s \quad \text{نيسط ونرتب}$$

$$\therefore 2 \int_s^s \text{ جتا } s \text{ د } s = \int_s^s (\text{جتا } s - \text{جتا } s)$$

$$\therefore \int_s^s \text{ جتا } s \text{ د } s = \frac{1}{2} \int_s^s (\text{جتا } s - \text{جتا } s)$$

مثال:

حل المعادلة التفاضلية  $د ص = ص$

بالقسمة على  $ص$  لجعل الكل متغير وتفاضله على طرف هكذا:

$$\frac{د ص}{ص} = \frac{1}{ص} \quad \therefore د ص = \frac{1}{ص}$$

وبتكامل الطرفين:

$$\int \frac{د ص}{ص} = \int \frac{1}{ص} \quad \therefore \ln V = \ln C$$

$$\text{لوح } ص = س + ج$$

ومنها وحسب قوانين الأسس واللوغاريتمات وجعل الصورة اللوغارتمية

بالصورة الأسية هكذا:

$$ص = ه + ج$$





مثال:

$$\text{أوجد } \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos x} dx$$

نضع الاقتران بصورة المعامل مشتقه الأس هكذا:

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos x} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\cos x}{\cos x} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos^2 x} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x} dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 - u^2} du \quad \text{حيث } u = \sin x$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{1 - u^2} du = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{(1 - u)(1 + u)} du$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^1 \left( \frac{A}{1 - u} + \frac{B}{1 + u} \right) du$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^1 \left( \frac{1}{2(1 - u)} + \frac{1}{2(1 + u)} \right) du = \frac{1}{2} \left[ -\ln|1 - u| + \ln|1 + u| \right]_{\frac{1}{2}}^1$$

$$= \frac{1}{2} \left[ -\ln|1 - 1| + \ln|1 + 1| - (-\ln|1 - \frac{1}{2}| + \ln|1 + \frac{1}{2}|) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[ -\ln 0 + \ln 2 - (-\ln \frac{1}{2} + \ln \frac{3}{2}) \right] = \frac{1}{2} \left[ \ln 2 + \ln \frac{1}{2} - \ln \frac{3}{2} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \ln \frac{2}{2} - \ln \frac{3}{2} \right] = \frac{1}{2} \left[ \ln 1 - \ln \frac{3}{2} \right] = \frac{1}{2} \left[ 0 - \ln \frac{3}{2} \right] = -\frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}$$

الطريقة السابعة:

التكامل بالكسور الجزئية Integration by Partial Fractions:

وهي طريقة لتكامل الاقتران النسبية التي بسطها لا يظهر في مشتقه مقامها.

وملخصها: نجزئ الاقتران النسبي الى اقتران جزئية أخرى بحيث يصبح بسط كل منها يظهر في مشتقه مقامه، ثم نطبق القانون.

$$\int \frac{Q(x)}{P(x)} dx = \int \frac{A}{x - a} dx + \int \frac{B}{x - b} dx + \dots$$

شرط أن يكون مقام الاقتران النسبي كثير حدود وتريعي وقابل للتحليل الى اقتران خطية غير متطابقة.

ويمكن أن ينشأ وضعان لهذه الحالة:

الوضع الأول: عندما تكون درجة البسط أقل من درجة المقام، عندها نبدأ نجزئ

الاقتران النسبي كما يلي:





مثال:

$$\text{أوجد } \int \frac{1+s^2}{1-s^2} ds$$

$$\text{أولاً: نجزئ } \frac{1+s^2}{1-s^2} = \frac{أ}{1+s} + \frac{ب}{1-s}$$

$$\text{أي أن } \frac{1+s^2}{1-s^2} = \frac{أ(1-s) + ب(1+s)}{(1-s)(1+s)} \text{ بعد تجميع الطرف الأيسر}$$

ولإيجاد قيمة أ نعوض  $s = 1$  حتى نعدم ب وليصبح معادلتها صفراً.

$$\text{أي أن } 2 = 1 + (1 - 1)أ + (1 - 1)ب \Rightarrow 1 = 0أ + 0ب$$

$$\text{ومنها } 1 = 1 - 1 \Rightarrow 0 = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} = أ$$

ولإيجاد ب نعدم أ ونعوض  $s = 1$

$$2 = 1 + (1 - 1)أ + (1 - 1)ب \Rightarrow 1 = 0أ + 0ب$$

$$\text{ومنه } 3 = 2 = 1 + 1 \Rightarrow 2 = 2 \Rightarrow \frac{3}{2} = ب$$

$$\text{أي أن } \int \frac{1+s^2}{1-s^2} ds = \int \frac{1}{1+s} ds + \int \frac{3}{1-s} ds$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+s} ds + \frac{3}{2} \int \frac{1}{1-s} ds$$

$$= \frac{1}{2} \ln(1+s) + \frac{3}{2} \ln(1-s) + ج$$

$$= \frac{1}{2} \ln(1+s) + \frac{3}{2} \ln(1-s) + ج$$

$$= \frac{1}{2} \ln(1+s) + \frac{3}{2} \ln(1-s) + ج \text{ كلوغارتم واحد}$$

الوضع الثاني: عندما تكون درجة البسط أكبر أو تساوي درجة المقام، عندها

نقسم البسط على المقام -قسمة طويلة أو تركيبيه- لنحصل على

اقترانات نسبية أو غير نسبية هكذا:





### مثال:

أوجد  $\int \frac{s^2 + s}{s - 1} ds$  "درجة البسط أكبر من درجة المقام"

بالقصة الطويلة

$$\begin{array}{r} \text{س}^2 + \text{س} + 2 \\ \hline \text{س} - 1 \overline{) \text{س}^2 + \text{س}} \\ \underline{\text{س}^2 \pm \text{س}} \\ \text{س} + 2 \\ \hline \text{س}^2 \pm \text{س} \\ \underline{\text{س}^2 \pm \text{س}} \\ 2 \\ \hline 2 \pm \text{س} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{الباقي} \\ 2 \end{array}$$

$$\therefore \int \frac{\text{س}^2 + \text{س} + 2}{\text{س} - 1} = \int (\text{س}^2 + \text{س} + 2) \text{ دس} + \frac{2}{\text{س} - 1} \text{ دس}$$

$$= \frac{\text{س}^2}{3} + \frac{\text{س}^2}{2} + 2 \text{ لوم} (\text{س} - 1) = \frac{\text{س}^2}{3} + \frac{\text{س}^2}{2} + \text{س} + \frac{2}{\text{س} - 1} + \text{ج. د.}$$

### مثال:

"درجة البسط = درجة المقام"

اوجد  $\int \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} dx$  دس

### بالقسمة الطويلة

$$\begin{array}{r} 1 \\ 1 - \sqrt{\phantom{x}} \quad \sqrt{\phantom{x}} \\ \hline 1 + \sqrt{\phantom{x}} \\ 1 \pm \sqrt{\phantom{x}} \end{array}$$

$$دس \left( \frac{2}{1 - 2س} + 1 \right) \int_2^3 = دس \frac{1 + 2س}{1 - 2س} \int_2^3$$

والآن نجزئ  $\frac{ب}{١-س} + \frac{ا}{١+س} = \frac{٢}{١-س}$

$$\frac{1 + (1 - s) + (1 + s)}{(1 - s)(1 + s)} = \frac{2}{1 - s^2}$$

الإعدام أو تفرض س = ١

$$1 = \frac{y}{y} = \underline{b} \leftarrow (1+1)b + (1-1)a = y \therefore$$

لإعدام بـ تفرض س = - ۱

## التكامل وتطبيقاته



$$2 = 1 - (-1 - 1) + (-1 - 1) \leftarrow \text{ب} = 1 - 1$$

$$\therefore \frac{1 + s^2}{1 - s^2} = 1 + \frac{1}{1 - s^2} + \frac{1}{1 + s^2} - 1 = \frac{1 + s^2}{1 - s^2}$$

$$\therefore \frac{1 + s^2}{1 - s^2} = \frac{1}{1 - s^2} + \frac{1}{1 + s^2}$$

$$1 = \frac{1}{1 - s^2} + \frac{1}{1 + s^2} - 1$$

$$1 = \frac{1}{1 - s^2} + \frac{1}{1 + s^2} - 1$$

$$1 = \frac{1}{1 - s^2} + \frac{1}{1 + s^2} - 1$$

$$1 = \frac{1}{1 - s^2} + \frac{1}{1 + s^2} - 1$$

(٢٢ - ٥) تطبيقات التكامل:

للتكامل المحدود بالذات عدة تطبيقات، منها إيجاد المساحات وقوانين النمو والاضمحلال المرتبطة بالأسس واللوغاريتمات، ثم الأيراد كتطبيق على موضوع الاقتصاد.

سنناقشها في هذه السطور:

أولاً: المساحات Areas

من تطبيقات التكامل المحدود العديدة والأكثر ارتباطاً بالرياضيات موضوع المساحات، لذا سنناقشه بشيء من التفصيل هكذا:

من المعروف أن مساحة المربع = الضلع × نفسه

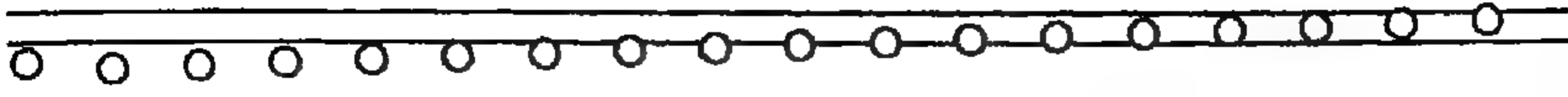
ومساحة المستطيل = الطول × العرض

ومساحة المثلث =  $\frac{1}{2}$  القاعدة × الارتفاع

وهكذا لبقية الأشكال الهندسية المضلعة والمنظمة.



## التكامل وتطبيقاته



والآن يطفو على السطح هذا السؤال:

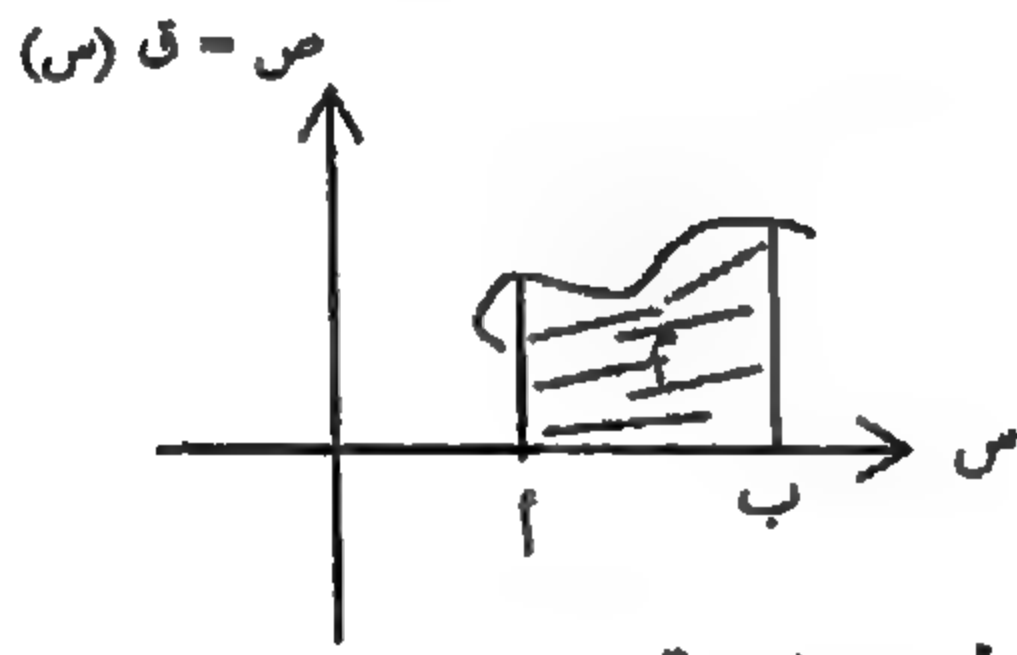
كيف نجد مساحة المنطقة غير المضلعة أو المضلعة في جزء منها؟

والجواب المباشر: بواسطة التكامل المحدود (عند معرفة حدود التكامل الأسفل والأعلى).

والسؤال الذي يليه، كيف يتم ذلك؟

والجواب: كما سيتضح في الحالات التالية:

(i) مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران  $ص = ق(س)$  ومحور السينات، والمستقيمين  $س = أ$  ،  $س = ب$  كما في الشكل.



$$م = \int_a^b ق(س) دس$$

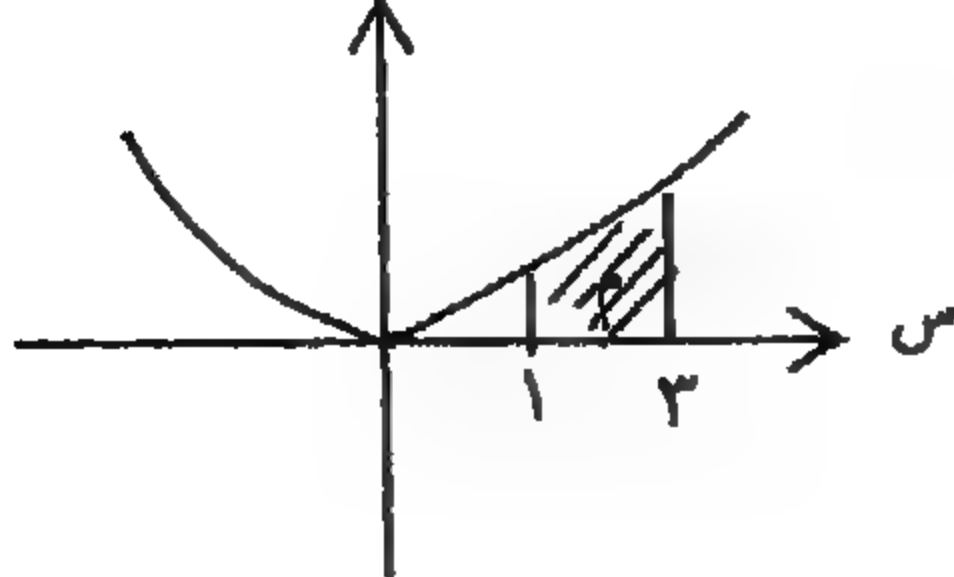
كون المساحة دائماً موجبة لأنها كمية غير متجهة.

مثال:

احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران  $ق(س) = س^2$  ومحور

السينات في الفترة ١١ ، ١٣

"الرسم ضروري لتحديد المنطقة المراد ايجاد مساحتها"  $ق(س) = ق(س)$



$$م = \int_1^3 س^2 دس = \left[ \frac{س^3}{3} \right]_1^3$$

$$= \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{27}{3} - \frac{1}{3} = \frac{26}{3} \text{ وحدة مساحة.}$$



## التكامل وتطبيقاته



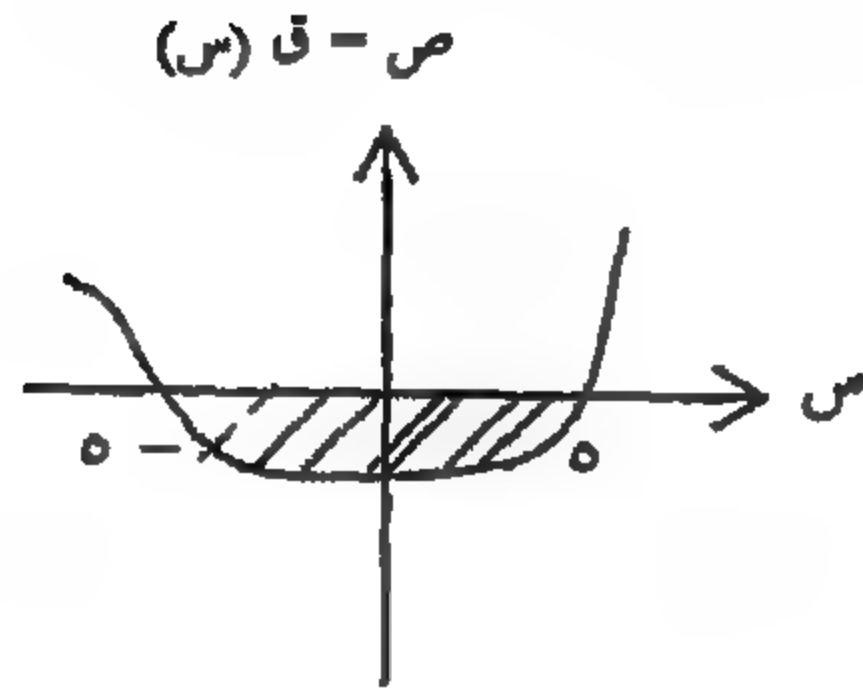
مثال:

احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران  $Q(s) = 25 - s^2$  ومحور السينات.

الحل:

هنا حدود التكامل غير معروفة لذا نُصفر الاقتران لمعرفة ما يلي:

$$25 - s^2 = 0 \quad , \quad (s + 5)(s - 5) = 0 \quad \text{صفر}$$



ص = -5 ، 5 صور التكامل

والرسم كما في الشكل:

$$M = \int_{-5}^5 |25 - s^2| ds$$

$$= \left[ 25s - \frac{s^3}{3} \right]_{-5}^5 = \left( 125 + \frac{125}{3} \right) - \left( 125 - \frac{125}{3} \right)$$

$$= \frac{750}{3} - \frac{250}{3} = \frac{500}{3} = 125 + \frac{125}{3} = 125 - \frac{125}{3} = \frac{500}{3}$$

$$= \left( \frac{500}{3} \right) = \frac{500}{3} \text{ وحدة مساحة}$$

كون المساحة دائماً موجبة وليست سالبة أو صفراً على الإطلاق.

ملحوظة:

يجب ملاحظة فيما اذا كان منحنى الاقتران  $Q(s)$  يقطع محور السينات في نقطة تقع بين حدي التكامل  $[a, b]$  فإذا حصل ذلك فإن المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران  $Q(s)$  ومحور السينات تحدد مساحتين، فكأننا نجزي التكامل بخاصية الاضافة (بل معكوسها) مع ملاحظة أن المساحة يجب أن تكون دائماً موجبة. ولذا نحول التكامل السالب الى موجب بوضع القيمة المطلقة كما في المثال:



## التكامل وتطبيقاته



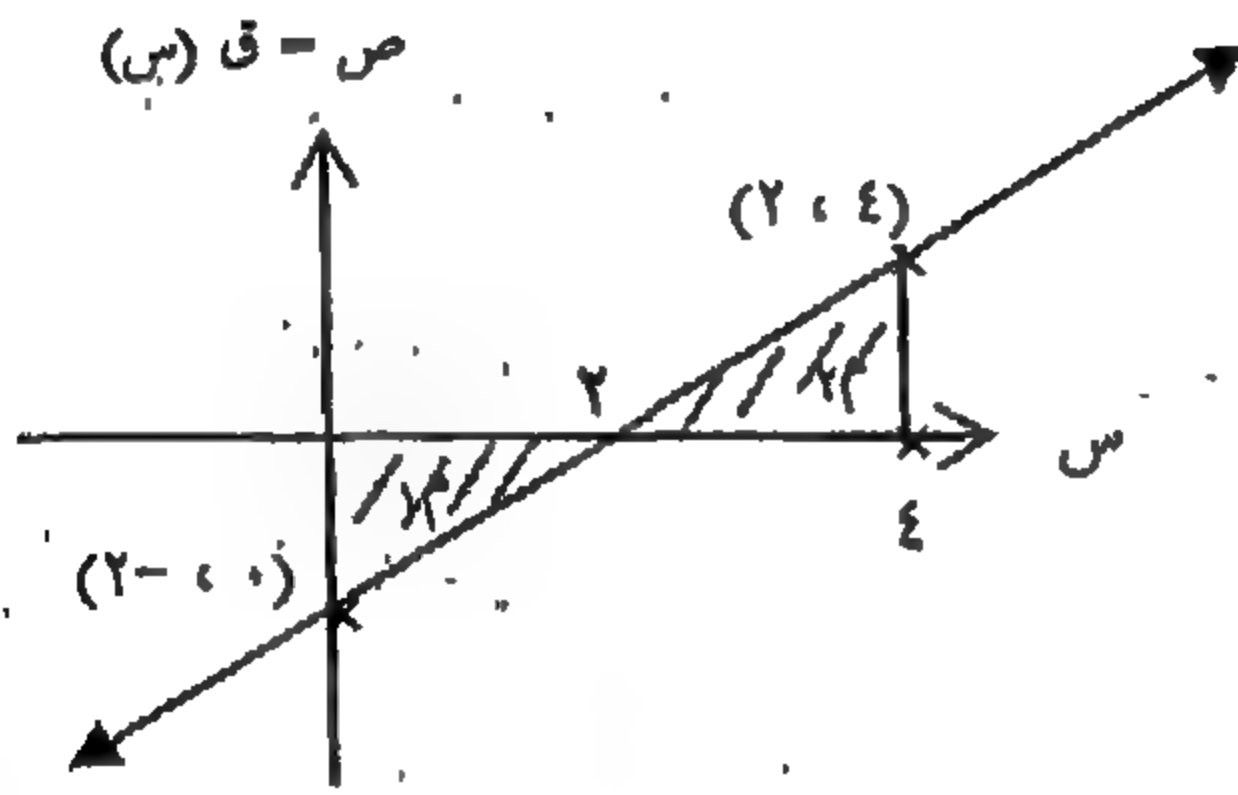
مثال:

احسب مساحة المنطقة المحدودة بمنحنى الاقتران  $Q = S$  و  $S = 2$ .

ومحور السينات خلال الفترة  $[0, 4]$ .

الحل:

نصفر الاقتران  $S = 2 = \text{صفر} \leftarrow S = 2$  نقطة التقاطع مع محور السينات.  
ونرسم الاقتران الخفي:



س	0	4
ق (س)	2-	2

هناك مساحتان

وبما أن  $M = M_1 + M_2$

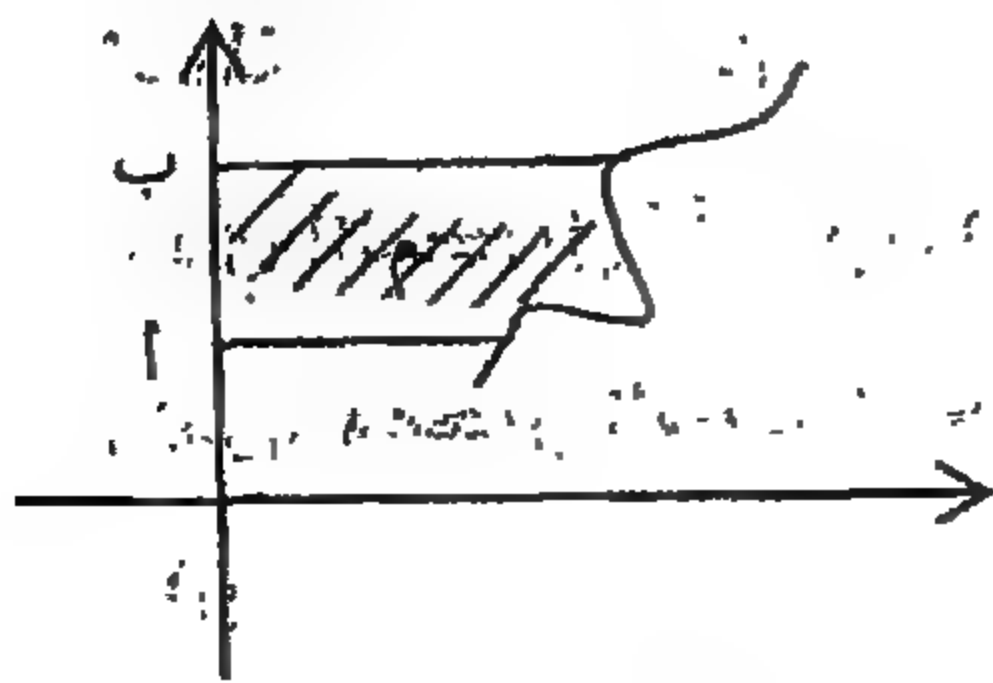
فإن  $M = \int_0^2 (2 - S) dS + \int_2^4 S dS$  (مع ملاحظة أن القيمة المطلقة لكل مساحة على حدة وليست للمساحتين معاً)

$$= \left[ 2S - \frac{S^2}{2} \right]_0^2 + \left[ \frac{S^2}{2} \right]_2^4 = \left( 4 - \frac{4}{2} \right) + \left( \frac{16}{2} - \frac{4}{2} \right) = 2 + 6 = 8$$

وحدات مساحة.

(ii) مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران  $Q = S$  ومحور الصادات

$$M = \int_0^4 Q dS = \int_0^4 S dS$$



أي نجعل  $S$  موضوع القانون هكذا:

مثال:

أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين  $S = 2$  و  $S = 4$  ومحور الصادات.



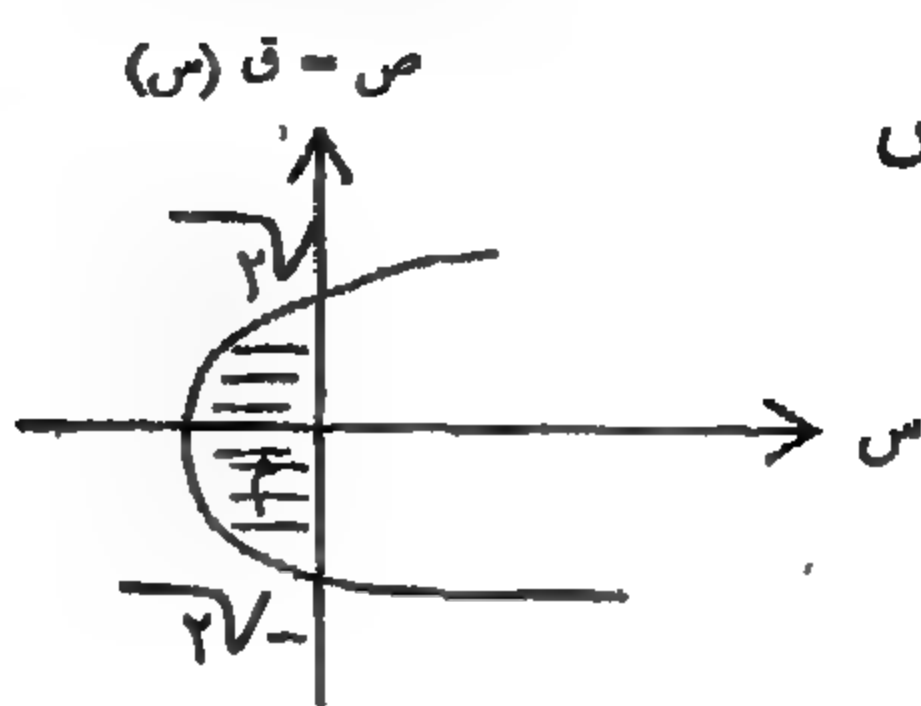
## التكامل وتطبيقاته



نجد حدود التكامل ← نصفر الاقتران هكذا:

$$2\sqrt{x} - 4 = \text{صفر} \leftarrow \sqrt{x}^2 - 2 = 2 = \text{صفر}, (\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 2) = 0 = \text{صفر}$$

∴ حدود التكامل  $[-2, 2]$  والشكل قطع ناقص كما يلي:



$$M = \int_{-2}^2 |2\sqrt{x} - 4| dx$$

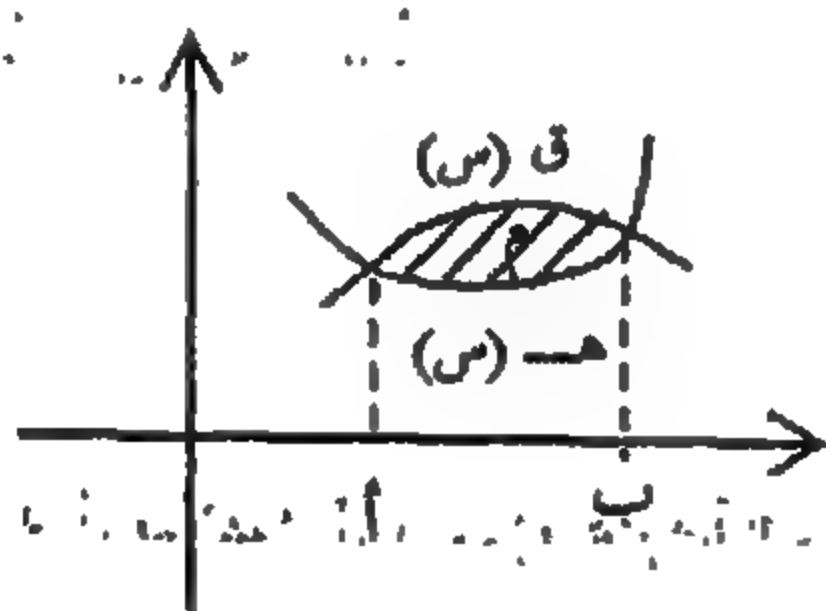
$$= \int_{-2}^2 \left( 4 - 2\sqrt{x} \right) dx = \left( 4x - \frac{2}{3}x^{3/2} \right) \Big|_{-2}^2 = \left( 8 - \frac{2}{3} \cdot 2^{3/2} \right) - \left( -8 - \frac{2}{3} \cdot (-2)^{3/2} \right)$$

$$= 8 - \frac{2\sqrt{2}}{3} + 8 - \frac{2\sqrt{2}}{3} = 16 - \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

$$= \frac{16}{3} - \frac{4\sqrt{2}}{3} = \frac{16 - 4\sqrt{2}}{3} \text{ وحدة مساحة}$$

(iii) المسافة بين منحنى اقترانين ق (س)، هـ (س) في الفترة [أ، ب] كما في

الشكل



$$M = \int_a^b |ق(س) - هـ(س)| ds$$

مثال:

احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقترانين:

$$ق(س) = 8 - س^2, هـ(س) = س^2$$

الحل:

لنجد حدود التكامل نحلها معا هكذا:



## التكامل وتطبيقاته



$$ق(س) = هـ(س)$$

$$٨ - س^٢ = س^٢$$

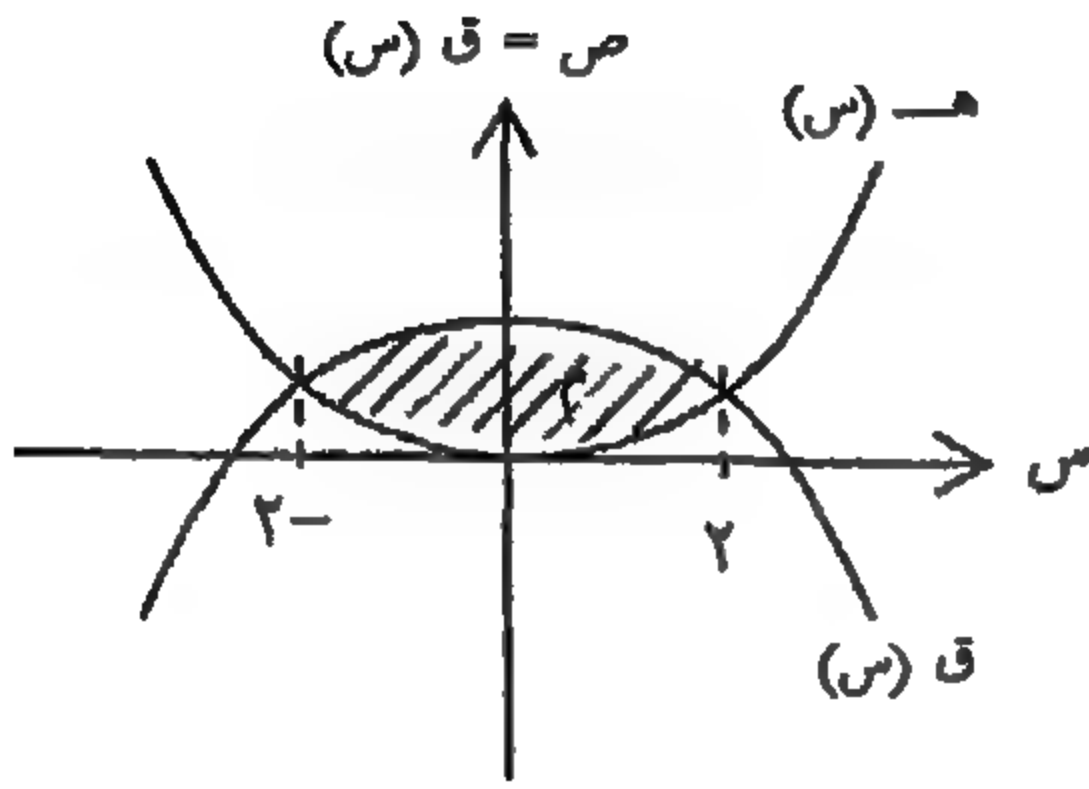
$$\therefore ٨ - س^٢ = س^٢ \leftarrow \text{صفر} \leftarrow ٤ - س^٢ = \text{صفر} \leftarrow (س + ٢)(س - ٢) = \text{صفر}$$

$$\therefore س = -٢, ٢ \text{ حدود التكامل}$$

$$م = \int_{-٢}^{٢} |ق(س) - هـ(س)| دس$$

$$= \int_{-٢}^{٢} (٨ - س^٢ - س^٢) دس$$

$$= \int_{-٢}^{٢} (٨ - ٢س^٢) دس$$



$$= ٨س - \frac{٢س^٣}{٣} = \frac{٦٤}{٣} \text{ وحدة مساحة.}$$

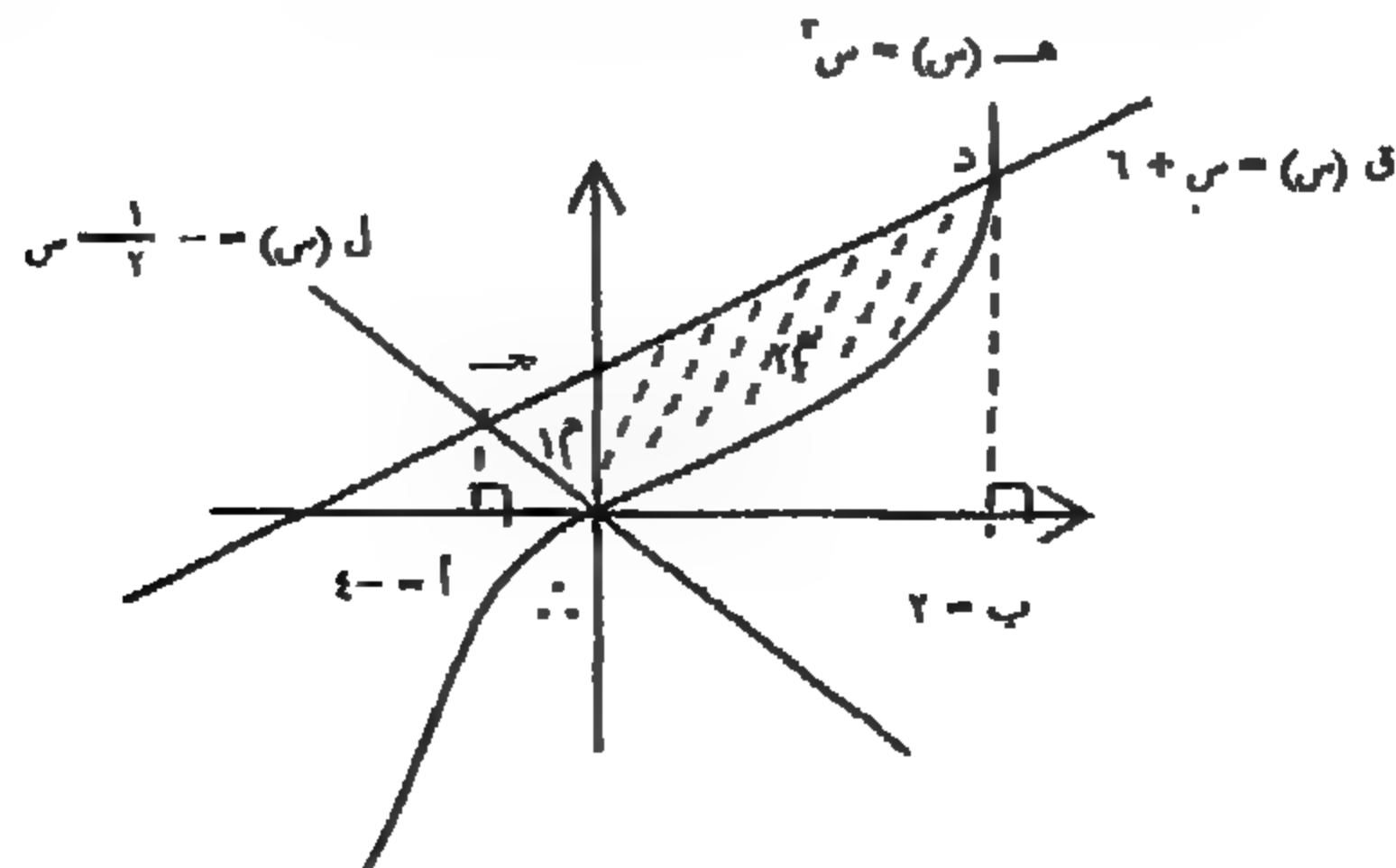
(iv) مساحة المنطقة المحصورة بين أكثر من اقترانين، هنا بالذات تقسم المنطقة الى مناطق بحيث يحدد كل منها باقترانين فقط، والرسم يوضح ويساعد على عملية التقسيم هكذا.

مثال:

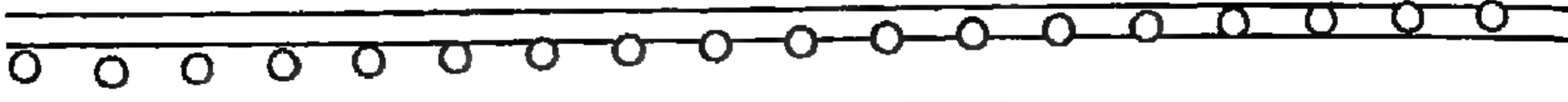
أوجد مساحة المنطقة المحدودة بمنحنيات الاقترانات الثلاثة التالية:

$$ق(س) = س + ٦, هـ(س) = س^٢, ل(س) = -\frac{١}{٢}س$$

الرسم للتوضيح:



## التكامل وتطبيقاته



نجد الاحداثي السيني للنقطة ج:

$$-\frac{1}{2} - s = 6 + s$$

ومنها  $s = -4 \leftarrow A$

ونجد الاحداثي السيني للنقطة د:

$$s^2 = 6 + s$$

$s^2 - s - 6 = 0$  وبواسطة نظرية الباقي

$$s = 2$$

بما أن  $m = m_1 + m_2$  فإن:

$$m_1 = \int_{-4}^2 (s + 6 + \frac{1}{2}s) ds = \int_{-4}^2 (s + 6 + \frac{1}{2}s) ds$$

$$= \int_{-4}^2 (s + 6 + \frac{1}{2}s) ds = 12 \text{ وحدة مساحة}$$

$$m_2 = \int_{-4}^2 (s^2 - 6 + s) ds = \int_{-4}^2 (s^2 - 6 + s) ds$$

$$= 10 \text{ وحدات مساحة}$$

$$\therefore m = 12 + 10 = 22 \text{ وحدة مساحة.}$$

والآن لو سألنا هذا السؤال:

ما الفرق بين التكامل والمساحة علماً بأن المساحة تعتبر كتطبيق على

التكامل؟

الفرق يكمن فيما يلي:

التكامل كمية متجهة يرتبط بالاشارة فهناك تكامل سالب وآخر موجب.

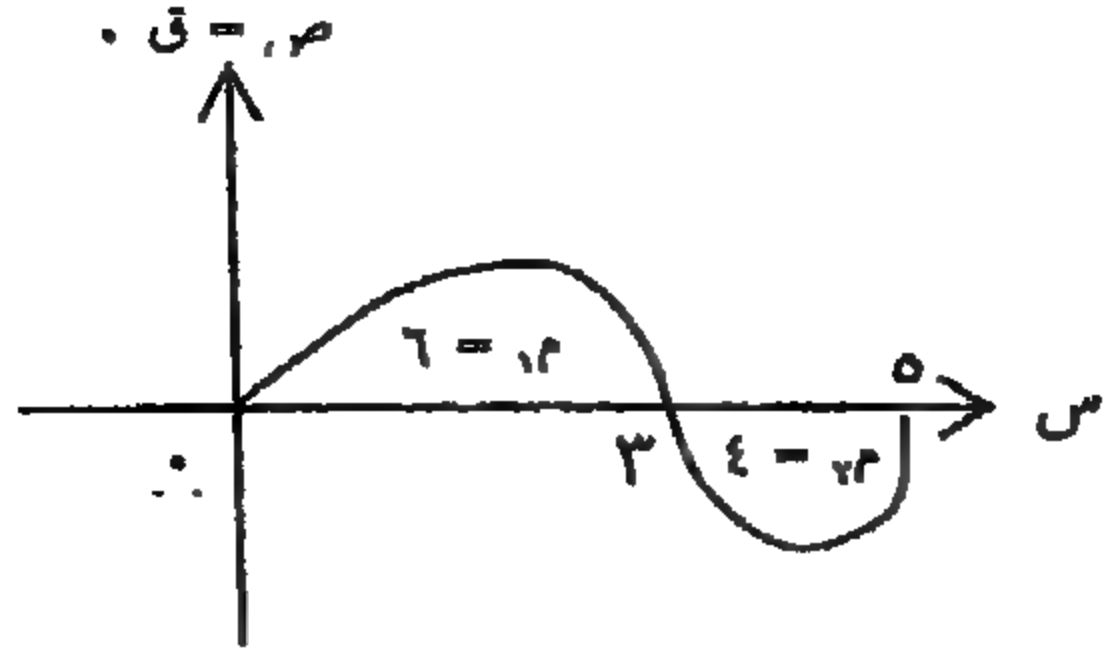
أما المساحة فكمية غير متجهة لا ترتبط بالاشارة، فالمساحات جميعها موجبة، وإن



## التكامل وتطبيقاته



وقعت المناطق المراد ايجاد مساحاتها تحت محور السينات كوننا نستخدم القيمة المطلقة في المساحات فقط.



والتفسير كما في المثال:

اعتمد على الشكل المجاور

الذي يمثل منحنى ق (س) وإذا كانت  $6 = 12$  ،  $4 = 12$

للإجابة عما يلي:

(i) أوجد  $\int_0^5 q(s) ds$

الحل:

$$\int_0^5 q(s) ds = \int_0^6 q(s) ds + \int_6^5 q(s) ds \quad (\text{خاصية الإضافة})$$

$$= (6 +) \text{ كونها فوق محور السينات } + (-4) \text{ كونها تحت محور السينات}$$

$$= 6 - 4 = 2 \quad \text{كعدد حقيقي بلا تمييز}$$

(ii) أوجد المساحة المحصورة بين منحنى ق (س) ومحور السينات في الفترة  $[0, 5]$

$$M = \int_0^5 |q(s)| ds = \int_0^6 |q(s)| ds + \int_6^5 |q(s)| ds$$

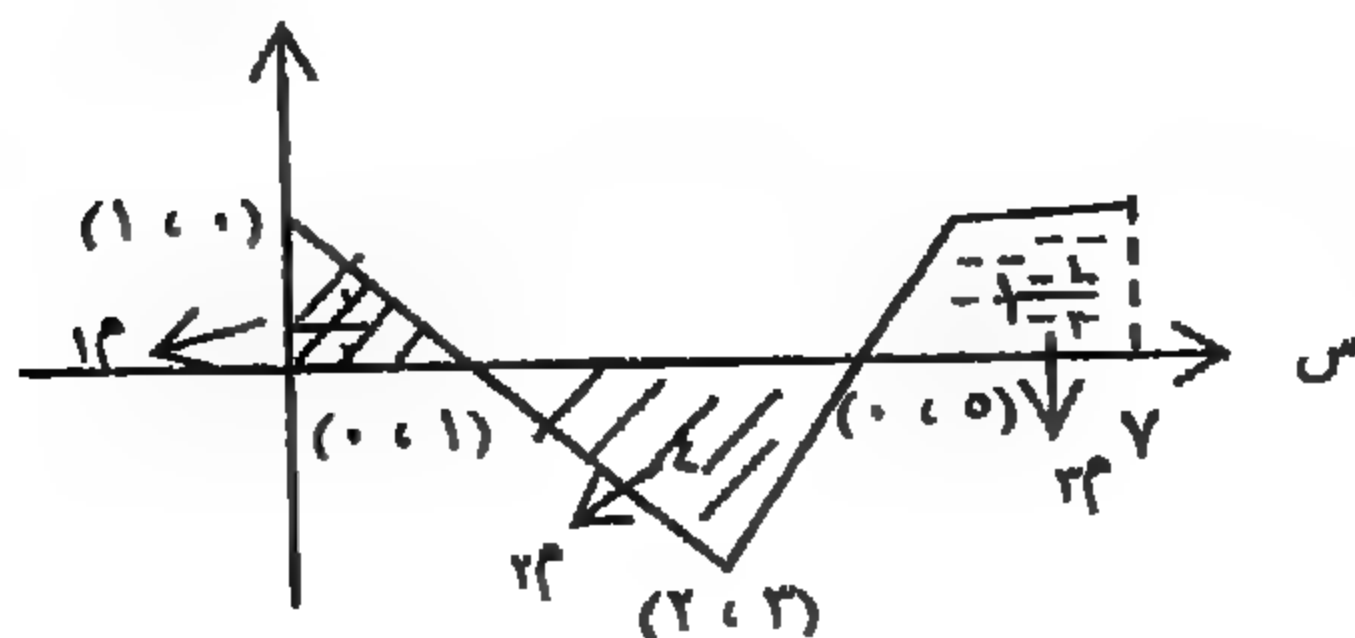
$$= 6 + 4 = 10 \quad \text{وحدات مربعة}$$

"وكما تلاحظ: الفرق بينَ والجواب في كل منهما مختلف".

ملحوظة:

اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران ق (س)

ص = ق (س)



$$\text{حيث } \frac{1}{2} = 12$$

$$4 = 12$$

$$1 - \frac{1}{2} = 12$$





كما في الشكل:

في إيجاد: (i)  $\int_0^1 |q(s)| ds$  كمساحة

(ii)  $\int_0^1 |q(s)| ds$  كمساحة أيضاً.

أولاً:  $\int_0^1 |q(s)| ds = \int_0^1 |q(s)| ds + \int_1^2 |q(s)| ds + \int_2^3 |q(s)| ds$

$$= \int_0^1 |q(s)| ds + \int_1^2 |q(s)| ds + \int_2^3 |q(s)| ds = 1 - \frac{1}{2} + 4 + \frac{1}{2} = 6$$

مساحة جميع المناطق في السؤال

أما  $\int_0^1 |q(s)| ds = \int_0^1 |q(s)| ds + \int_1^2 |q(s)| ds + \int_2^3 |q(s)| ds$

$$= \int_0^1 |q(s)| ds + \int_1^2 |q(s)| ds + \int_2^3 |q(s)| ds = 1 - \frac{1}{2} + 4 - 2 = 2$$

هذا العدد لا يمثل مساحة جميع المناطق في السؤال.

لذا يجب وضع  $| |$  خطي القيمة المطلقة حول  $q(s)$  نفسه هكذا:

$\int_0^1 |q(s)| ds$  وليس حول  $q(s)$  هكذا  $\int_0^1 q(s) ds$  لذا وجب التويه.

## ثانياً التطبيقات الاقتصادية للتكامل:

سنناقش كيفية استخدام التكامل المحدود في حل بعض المسائل الاقتصادية التي تساعد الإداريين في المصانع والشركات على اتخاذ القرارات الصائبة لتحقيق أهداف أصحاب هذه المنشآت ألا وهي حصد الأرباح وبيعها الأقصى، ولنبدأ بالإيراد:

والإيراد اثنان هما:

الإيراد الكلي:  $(د(s))$  وهو مجموع ما تحصل عليه الشركة من جراء بيع  $s$  وحدة من منتجاتها بسعر وحدة نقدية.

ويُحدد الاقتران  $د(s) = s \times ع$



والايراد الحدي:  $D(s)$  وهو معدل التغير في الايراد بالنسبة لعدد الوحدات المباعة  $(s)$  وحدة).

أو الايراد بالنسبة للوحدة المباعة في اللحظة التي يبيع منها  $s$  وحدة من المنتج ويحدد بالاقتران  $D(s)$ ، لذا فاقتران الايراد الحدي  $D(s)$  هو المشتقة الأولى لاقتران الايراد الكلي  $D(s)$ .

من هذه العلاقة ولأن عملية التكامل عكس عملية التفاضل كما أسلفنا، فإذا علم اقتران الايراد الحدي  $D(s)$  فإننا بواسطة التكامل نستطيع أن نجد اقتران الايراد الكلي هكذا:  $D(s) = \int D(s) ds$ .

مثال:

إذا كان اقتران الايراد الحدي لـ  $s$  من الوحدات التي ينتجها مصنع هو:

$$D(s) = 3s^2 - 2s + 5$$

أوجد: اقتران الايراد الكلي الناتج عن بيع جميع الوحدات.

الحل:

$$\text{بما أن } D(s) = \int (3s^2 - 2s + 5) ds$$

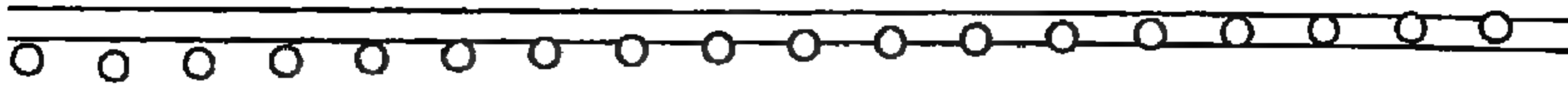
$$= \frac{3s^3}{3} - \frac{2s^2}{2} + 5s + C = s^3 - s^2 + 5s + C$$

يكون الايراد الكلي  $D(s)$  = صفر {

$$\therefore D(s) = 3s^2 - 2s + 5$$

هذا ويمكن ايجاد قيمة الايراد الكلي الناتج عن بيع عدد محدود من الوحدات ومن نفس العلاقة  $D(s) = \int D(s) ds$  باعتبار  $s \in \mathbb{R}$  لأن عدد وحدات السلعة المباعة أعداد طبيعية على الأغلب مثل الثلاجات والغسالات والتلفزيونات وعلب المعلبات والتطالي والمربيات وغيرها.





مثال:

إذا كان اقتران الإيراد الحدي بالنسبة لبيع ثلاثيات هو:

$$D'(S) = 30S^2 + 20S + 7 \text{ فما قيمة الإيراد الكلي الناتج عن بيع ٤ ثلاثيات؟}$$

الحل:

$$\text{بما أن } D(S) = \int D'(S) dS$$

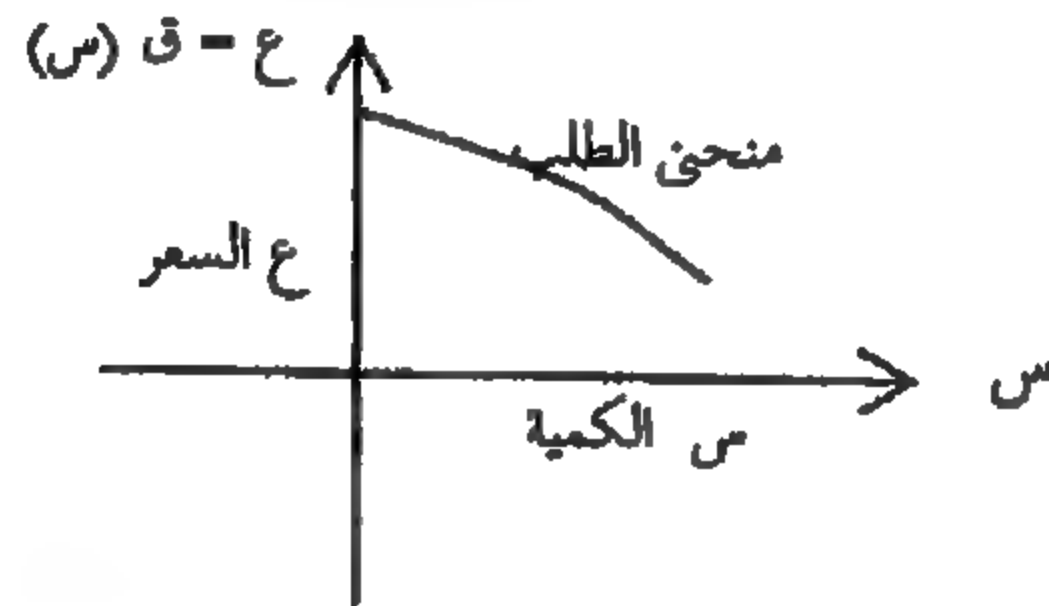
$$\text{فإن } D(S) = \int (30S^2 + 20S + 7) dS$$

$$= 10S^3 + 10S^2 + 7S \quad \{\text{كون جـ = صفر كما أسلفنا}\}$$

$$\text{ومنه } D(4) = 10(4)^3 + 10(4)^2 + 7(4)$$

$$= 640 + 160 + 28 = 828 \text{ دينار.}$$

وبعد الإيراد بنويعه الحدي والكلي سننتقل الى منحنيات العرض والطلب والفائض الاقتصادي المتعلق بالمستهلك من جهة والمنتج من جهة أخرى كما يلي:



لأمر اقتصادي سنعتبر

محور السينات يمثل عدد

وحدات السلعة المباعة س

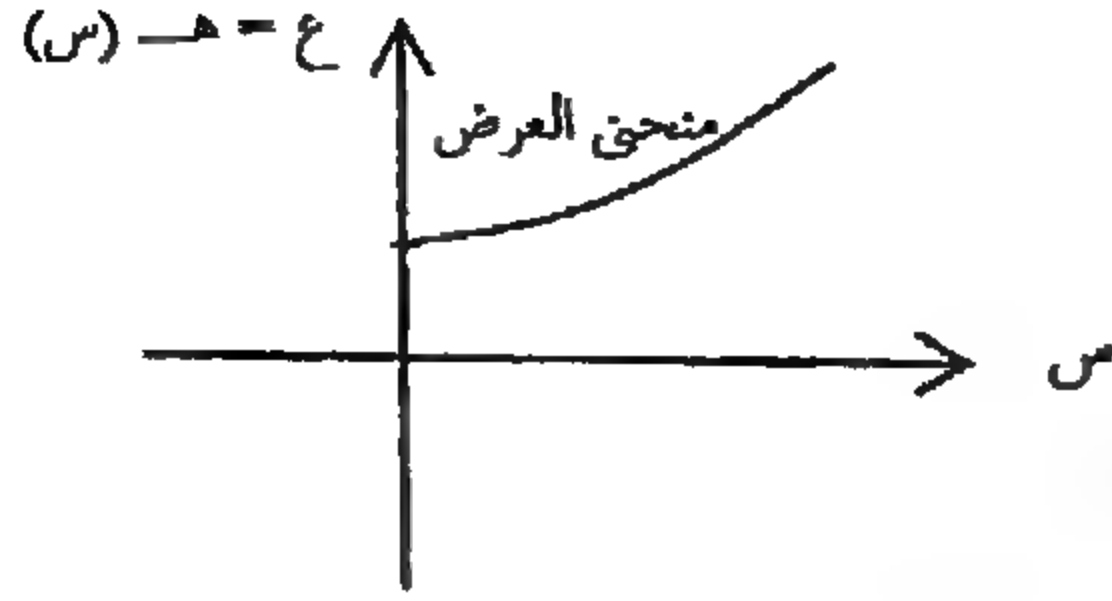
ومحور الصادات يمثل السعر ع، ومن البديهي أن الطلب على سلعة معينة يتأثر بتغير سعرها، فإذا كان الطلب عليها مرناً كالطلب على الفواكه والخضار، فكلما ازداد سعر السلعة ع قلَّ الطلب عليها من قبل المستهلك، والعكس صواب.

ونعبر عن السعر ع بالاقتران  $E = Q(S)$  حيث س عدد وحدات السلعة المباعة ويسمى اقتران السعر - الطلب ومنحناه مُمثل كما في الشكل أعلاه، وهو اقتران متناقص فالعلاقة بين السعر والكمية علاقة عكسية، فزيادة السعر تؤدي

## انتكامل وتطبيقاته



الى نقصان الطلب على السلعة، ونقصان السعر يؤدي الى زيادة الطلب عليها بالنسبة للمستهلك.

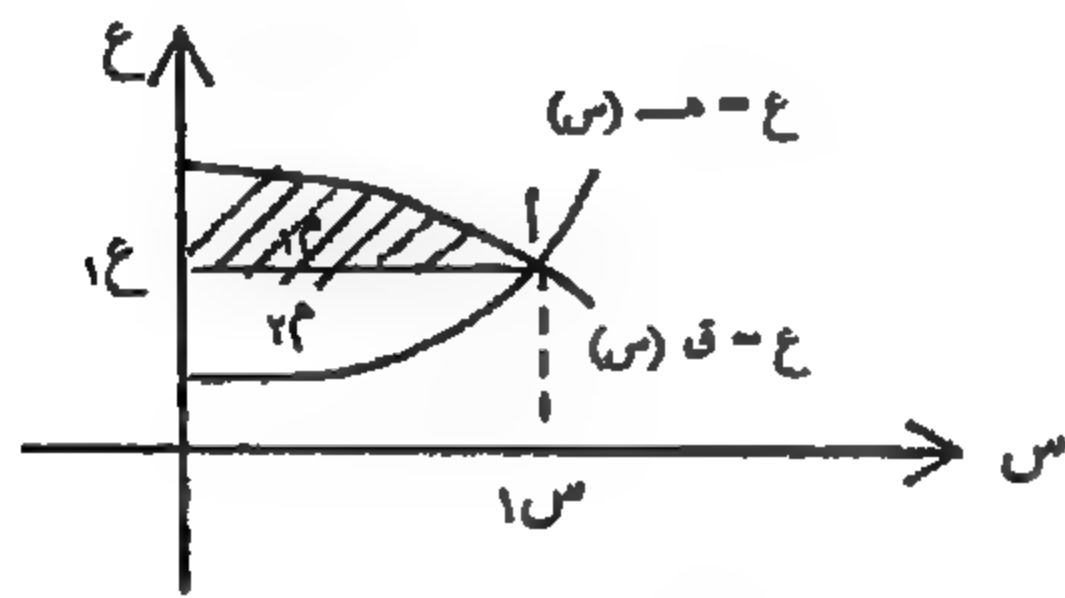


وأما بالنسبة الى المنتج وكما هو واضح

في الشكل فالعلاقة بين س الوحدة المنتجة

والسعر علاقة طردية لأن المنتج سيعرف من السلعة وحدات أكثر بزيادة السعر ليزداد ربحه، وفي هذه الحالة يكون السعر اقتراناً أي  $ع = ق (س)$  ويسمى اقتران السعر - العرض ومنحناه ممثل بالشكل وهو متزايد لأن العلاقة بين الكمية س والسعر ع بالنسبة للمنتج طردية، فعندما يلاحظ المنتج زيادة السعر فإنه يعرض كمية أكبر للبيع.

وباختصار شديد هناك منحنيان اقتصاديان مهمان في هذا السياق، وعند جمعهما معاً كما في الشكل، وهذا يتم عند التوازن. فإذا تقاطع المنحنيان في



النقطة أ (س₁ ، ع₁) نقطة التوازن فإن

س₁ ← كمية التوازن

ع₁ ← سعر التوازن

فالسعر الذي عنده  $ق (س₁) = هـ (س₁)$  يسمى سعر التوازن

والكمية س₁ التي عندها  $ق (س₁) = هـ (س₁)$  تسمى كمية التوازن

فإذا ثبت السعر عند ع. فإنك تلاحظ من الشكل:

(i) لأي كمية  $س > س₁$  يرغب المستهلك في شرائها فإن التوفير في السعر هو

$$ق(س) - ع₁$$





وتمثل المساحة المظللة م<sub>١</sub> في الشكل ويُعرّف هذا التوفير الكلي بفائض المستهلك Consumer Surplus ويرمز له بالرمز فاك والمساحة تحسب بالتكامل هكذا:

قائض المستهلك:

$$ف ك = \int_0^{س} (ق(س) - ع) د س$$

$$\therefore ف ك = \int_0^{س} ق(س) د س - ع س \leftarrow \text{تعريف فائض المستهلك}$$

مثال:

إذا كان  $ع = ق(س) = ٤٠ - ٦ س$  اقتران السعر - الطلب حيث ع السعر بالدينار

س عدد القطع المنتجة وان السعر الثابت عند ع<sub>١</sub> = ٤

أوجد فائض المستهلك:

$$\text{بما أن } ف ك = \int_0^{س} ق(س) د س - ع س$$

$$\text{والآن نجد } س_١ \text{ من } ع = ٤٠ - ٦ س \text{ ، } ع = ٤٠ - ٦ س_١$$

$$\therefore ٤ = ٤٠ - ٦ س_١ \leftarrow س_١ = ٦ \text{ وحدات كمية التوازن}$$

$$\text{ومنه } ف ك = \int_0^6 (٤٠ - ٦ س) د س - ٢٤$$

$$= ٤٠ س - ٣ س^٢ - ٢٤$$

$$= ٤٠(٦) - ٣(٦)^٢ - \text{صفر} - ٢٤$$

$$= ٢٤٠ - ١٠٨ - ٢٤$$

$$= ١٢٢ - ١٠٨ = \text{دنانير فائض المستهلك.}$$



### التكامل وتطبيقاته



(ii) لأي كمية  $s > s_1$  يبيعها المنتج يكون المكسب في السعر هو  $e_1 - h(s)$  وتمثل المساحة  $m_1$  في الشكل السابق ويعرف هذا المكسب بفائض المنتج ويرمز له بالرمز  $f_1$

وبواسطة التكامل:

$$f_1 = \int_{s_1}^s (e_1 - h(s)) ds = e_1 s - \int_{s_1}^s h(s) ds$$

مثال:

إذا كان اقتران السعر - العرض هو  $e = h(s) = 15 + 3s$  وأن السعر الثابت عند  $e_1 = 45$  أوجد فائض المنتج.

$$f_1 = \int_{s_1}^s (e_1 - h(s)) ds$$

والآن نجد  $s_1$  من  $e = 15 + 3s$

$$\therefore e_1 = 15 + 3s_1$$

$$\therefore 45 = 15 + 3s_1$$

ومنه  $s_1 = 10$  عدد الوحدات

$$\therefore f_1 = \int_{10}^s (45 - (15 + 3s)) ds = \int_{10}^s (30 - 3s) ds = \left( 30s - \frac{3s^2}{2} \right) \Big|_{10}^s$$

$$= \left( 30s - \frac{3s^2}{2} \right) - \left( 30 \times 10 - \frac{3 \times 10^2}{2} \right) = (150 + 150) - 450 =$$

$$= 300 - 450 = -150 \text{ دينار فائض المنتج}$$

وعند التوازن فإن سعر التوازن يتحقق عندما:

$$q(s_1) = h(s_1) \text{ علاقة اقتصادية هامة.}$$





مثال:

إذا كان ع = ق (س) = ٥٠ - ٤ س هو اقتران السعر الطلب

وكان ع = هـ (س) = ٢٠ + ٢ س هو اقتران السعر العرض

أوجد سعر التوازن وكميته وفائض المستهلك وفائض المنتج.

الحل:

عند التوازن:

ق (س) = هـ (س)  $\leftarrow ٥٠ - ٤ س = ٢٠ + ٢ س$  هذه معادلة

$\therefore ٥ = س$  وحدات كمية التوازن

بالحالتين نفس سعر التوازن  $\begin{cases} ٣٠ = (٥) ٤ - ٥٠ = ع \\ ٣٠ = (٥) ٢ + ٢٠ = هـ \end{cases}$

فك =  $\int (٥٠ - ٤ س) د س - (٣٠) (٥)$

$٥٠ س - ٢ س^٢ - (٣٠) (٥) = ١٥٠ - ٢ (٥) - ١٥٠ =$

$٢٥٠ - ٥٠ - ١٥٠ = ٥٠$  دينار

فج =  $\int (٢٠ + ٢ س) د س - (٣٠) (٥)$

$١٥٠ - ١٥٠ = ٢٠ س + س^٢ - ١٢٥ - ١٥٠ =$  صفر

$٢٥ =$  دينار

مثال:

إذا كان اقتران الايراد الحدي لمبيعات سيارات من نوع BMW هو:

ق (ن) =  $٣٠٠ ن^٢ + ٢٠ ن + ٢$  حيث ن الزمن بالسنوات





أوجد قيمة الايراد الكلي المتوقع خلال ٤ سنوات.

$$Q(n) = (300n^2 + 20n + 2) \text{ د ن}$$

الايراد الكلي

$$\int_0^4 (300n^2 + 20n + 2) \text{ د ن} =$$

$$= \frac{300}{3} n^3 + \frac{20}{2} n^2 + 2n \Big|_0^4$$

$$= 100(4)^3 + 10(4)^2 + 2(4) = 6400 + 160 + 8 = 6568 \text{ دينار}$$

$$= 6400 + 160 + 8 = 6568 \text{ دينار}$$

ثالثاً:

### التطبيقات العلمية للتكامل:

للاقترانات الأسية واللوغارتمية الطبيعية العديد من التطبيقات العلمية لكثير من الظواهر المتعلقة باقترانات الزمن  $n$  وعلى الصورة  $v = e^{(n)}$  والمتجسدة بقوانين النمو والاضمحلال Growth and Decay .

فالنمو والتكاثر يكون بنتيجة التزايد وأما الاضمحلال والتلاشي يكون بنتيجة التناقص. وبالاستعانة بالتكامل يمكن استنتاج هذا القانون البالغ الأهمية في شتى المجالات العلمية:

$$v = e^{(n)} = e^{(n)} \times h^{an} \text{ حيث:}$$

$$e = \text{القيمة الابتدائية للقانون } e^{(n)}$$

$$e_n = \text{القيمة المراد ايجادها من القانون}$$

$$h = 2.72 \text{ العدد النايبييري نسبة الى العالم البريطاني نايبير (١٥٥٠ - ١٦٠٧)}$$

الذي كان أول من أوجده واستخدمه.





### التكامل وتطبيقاته



ن = الزمن

أ = عدد ثابت يسمى معامل التزايد أو التناقص.

فإذا كان  $A < 0$  صفر فإن قيمة  $E_n$  تزداد بمرور الزمن، وعندها تعبر المعادلة  
ص = ع  $E_n$  عن النمو مثل زيادة عدد السكان في البلدان وكما هو واضح في هذا  
المثال:

مثال:

إذا بلغ عدد سكان إحدى الدول ٥٠٠٠٠٠٠ نسمة عام ٢٠٠٤ م، وكان معدل  
النمو في تلك الدولة يتبع العلاقة ص = ع  $E_n$   $= ٥٠٠٠٠٠٠ \times ٠.٠٢٧$  هـ، حيث ن تُعبر عن  
عدد السنوات اعتباراً من عام ٢٠٠٤ م. ما عدد سكان تلك الدولة عام ٢٠٠٥ م؟

$$\text{المدة} = ٢٠٠٤ - ٢٠٠٥ = ١ \text{ سنة}$$

أي أن:

$$E_n = ١ \times ٠.٠٢٧ \times ٥٠٠٠٠٠٠ = ١٠٢٧٠٠٠ \text{ هـ}$$

لكن هـ = ٢.٧٢ العدد النايبيري

$$\text{عدد السكان عام ٢٠٠٥ م} = ٥٠٠٠٠٠٠ \times (٢.٧٢)^{٠.٠٢٧}$$

وباستخدام الآلة الحاسبة أو الحاسوب فإن  $(٢.٧٢)^{٠.٠٢٧} = ١.٠٢٧٣٤٨$

$$\text{عدد السكان عام ٢٠٠٥ م} = ٥٠٠٠٠٠٠ \times (١.٠٢٧٣٤٨)$$

$$= ٥١٣٦٧٤٠ \text{ نسمة}$$



## التكامل وتطبيقاته



وإذا كان  $A > 0$  صفر فإن قيمة  $E$  تتناقص بمرور الزمن، وعندها تعبر المعادلة  $V = E$  عن الاضمحلال أو التلاشي، ويسمى  $A$  معامل الاضمحلال مثل انحلال المواد المشعة كما هو واضح في المثال:

مثال:

تتحلل مادة مشعة بشكل منتظم بمرور الزمن، ويخضع تحللها لقانون الاضمحلال أو التلاشي، فإذا كان معدل التناقص لهذه المادة يبلغ  $0.002$  سنوياً، فجد الكمية المتبقية من المادة بعد مرور  $3000$  سنة، علماً بأن كتلة المادة الأصلية تبلغ  $50$  غراماً.

باستخدام القانون  $V = E(1 - A)^N$  حيث:

$E$  المادة المنبعثة بعد  $N$  سنة

$E(0)$  المادة الأصلية أو القيمة الابتدائية  $= 50$  غراماً

$H$  العدد النايبييري  $= 2.72$

$N$  الزمن بالسنوات  $= 3000$  سنة

$A$  ثابت (معامل التناقص أو الاضمحلال)  $= -0.0002$  كونه تناقص اضمحلال

أو تلاشي

$$\therefore E(3000) = 50 \times (2.72)^{-3000 \times 0.0002}$$

$$= 50 \times (2.72)^{-0.6} = \frac{1}{2.72} \times 50 =$$



## التكامل وتطبيقاته



$$= \frac{50}{6(2,72)} \text{ باستخدام الآلة الحاسبة أو الحاسوب.}$$

$$= 0,129 \text{ غراماً المادة المتبقية}$$

هذا ويمكن استخدام قانون النمو والاضمحلال في إيجاد الفائدة المركبة عند استثمار مبلغاً من المال في أحد البنوك، وعندما تضاف الفائدة الى المبلغ في كل لحظة وباستمرار وكأنتنا نحسب الفائدة المركبة بشكل لحظي (في أي لحظة نشاء) كما في المثال:

مثال:

أودع شخص ٥٠٠ دينار في بنك، بمعدل فائدة مركبة ٧,٥٪ سنوياً، فإذا كان البنك يحسب الفائدة المركبة باستمرار ويضيفها الى المبلغ في كل لحظة، ما هي جملة المبلغ بعد ٤٠ سنة، ثم احسب فوائده المركبة.

باستخدام القانون:

$$ص = ع = ع \times هـ^{أن} \text{ حيث}$$

$$ع = \text{الجملة بعد } ٤٠ \text{ سنة}$$

$$ع = \text{المبلغ المودع} = ٥٠٠ \text{ دينار}$$

$$أ = ٧,٥\% = ٠,٠٧٥ \text{ القيمة تزداد، نمو}$$

$$ن = ٤٠ \text{ سنة}$$

$$\therefore \text{ج. (٤)} = ٥٠٠ \times (٢,٧٢)^{٠,٠٧٥ \times ٤٠}$$



### التكامل وتطبيقاته



$$= 500 \times (2.72)^2$$

باستخدام الآلة الحاسبة أو الحاسوب

$$= 20,0855 \times 500 \text{ ج (د.)}$$

$$= 1004,275 \text{ دينار}$$

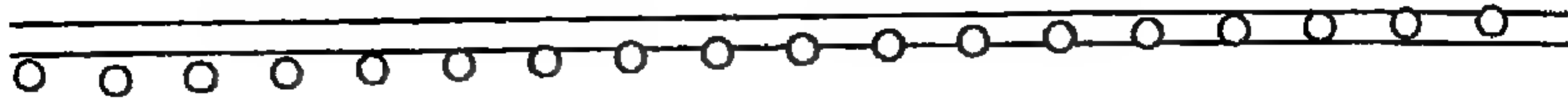
الفائدة المركبة = الجملة المركبة - الأصل (المبلغ المودع)

$$= 1004,275 - 500 = 504,275 \text{ دينار}$$

من الملاحظ أن الفائدة المركبة أكبر من الأصل، وهذا غالباً ما يحدث

بازدياد الزمن.

## التكامل وتطبيقاته



### (٢٢- ٦) أمثلة محلولة على التكامل وتطبيقاته

مثال (١) :

إذا كان  $ق(س) د س = س + س^2 + س^2$  أوجد  $ق(١)$  ،  $ق(١)$

الحل:

حتى نتخلص من التكامل فإننا نشتق الطرفين هكذا:

$$\frac{د}{د س} ق(س) د س = (س + س^2 + س^2) \frac{د}{د س} = ق(س) = ق(س) \{ \text{مفهوم التكامل وعلاقته بالتفاضل} \}$$

$$\therefore ق(س) = (س + س^2 + س^2)$$

$$= ١ + ٢ س + ٣ س^2$$

$$\therefore ق(١) = ١ + ٢(١) + ٣(١)^2 = ٦$$

ومنها  $ق(٢) = ٦ + ٢ = ٨$

$$\therefore ق(١) = ٦ + ٢ = ٨$$

مثال (٢) :

ما إشارة التكامل  $\int \frac{س}{س^3 + س^2} د س$  أسالبة أم موجبة ؟

بما أن إشارة التكامل  $\int \frac{س}{س^3 + س^2} د س$  هي نفس إشارة الاقتران

في الفترة  $[-٣ ، -١]$  فإننا نجد إشارة الإشارة هكذا:

$$\begin{array}{c} \text{سالبة} \\ \frac{س}{س^3 + س^2} \\ \text{موجبة} \end{array}$$

إشارة البسط

إشارة المقام

كون  $س^2$  موجب و  $س^3$  موجب



∴ إشارة الاقتران  $\frac{s}{s^3 + s^4}$  سالبة

∴ إشارة التكامل  $\int_{-2}^{-1} \frac{s}{s^3 + s^4} ds$  سالبة أيضاً.

مثال (٣):

أجر التكاملات التالية:

$$(i) \int (s^2 - s^2 + s^2 - s^2) ds$$

الحل:

بعد التبسيط بالقانون هكذا:

$$\int (s^2 - s^2 + s^2 - s^2) ds$$

$$= \int \left( \frac{s^2}{2} - \frac{s^2}{1} + \frac{s^2}{3} - \frac{s^2}{4} \right) ds$$

$$= \int \left( \frac{s^2}{2} - s^2 + \frac{s^2}{3} - \frac{s^2}{4} \right) ds$$

$$= \int \left( \frac{1}{2} s^2 + \frac{1}{3} s^2 - s^2 - \frac{1}{4} s^2 \right) ds$$

$$(ii) \int_1^2 \frac{s^4 + 1}{s^2} ds$$

الحل:

بعد التجزئ بالقانون هكذا:

$$\begin{aligned} \int_1^2 \left( \frac{s^4}{s^2} + \frac{1}{s^2} \right) ds &= \int_1^2 (s^2 + s^{-2}) ds = \int_1^2 \left( \frac{1}{s^2} + \frac{s^4}{s^2} \right) ds \\ \frac{17}{6} &= \left( \frac{1}{1} - 2(1) \frac{1}{3} \right) - \left( \frac{1}{2} - 2(2) \frac{1}{3} \right) = \left[ \frac{1}{s} - \frac{1}{3} s^2 \right]_1^2 = \end{aligned}$$





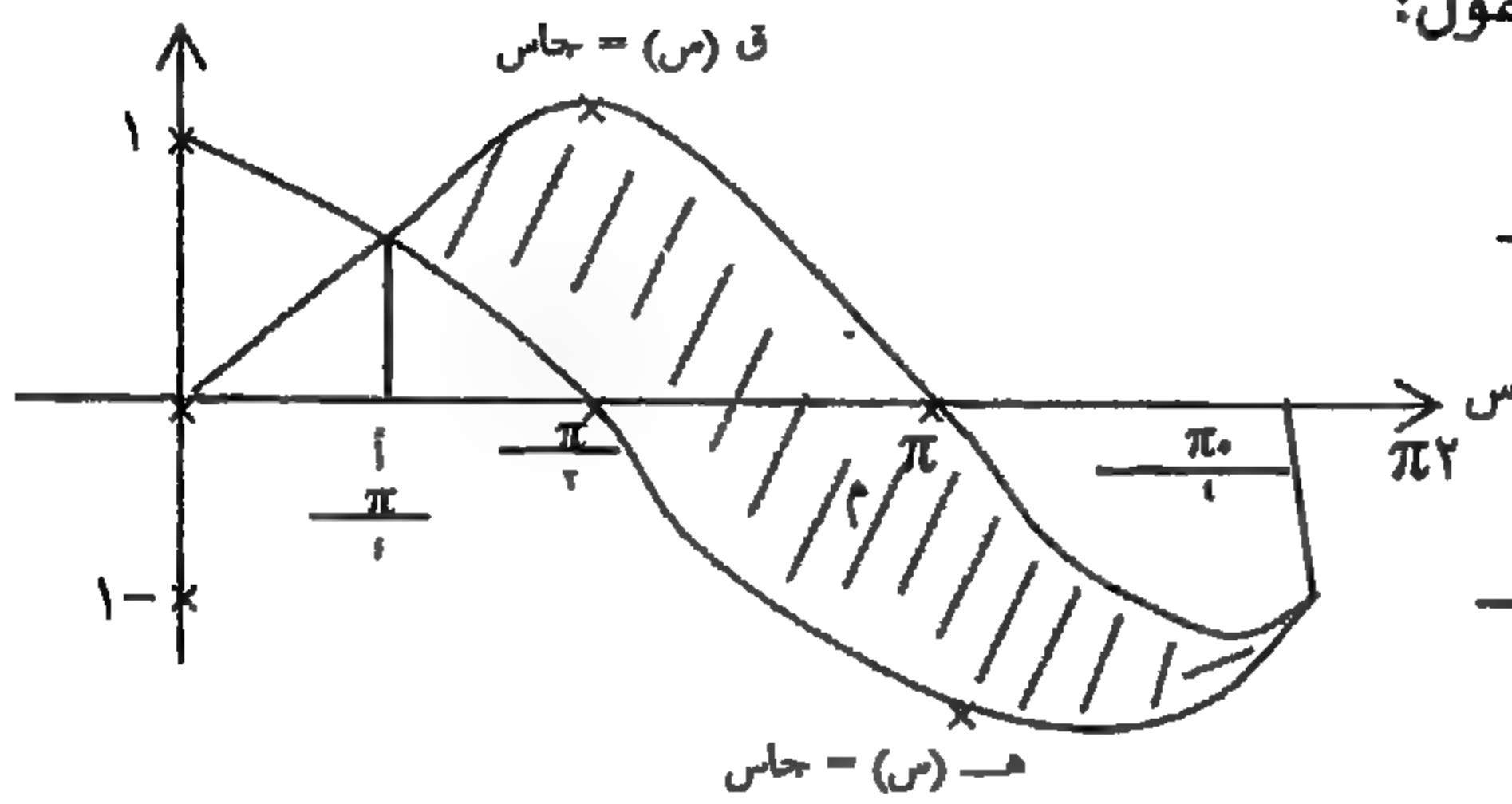
مثال (٤):

أوجد المساحة المحصورة بين منحنى الاقترانين:

$$ق (س) = جا س ، هـ (س) = جتا س ، حيث \ 0 \leq س < 2\pi$$

الحل:

ص = ق (س)



لإيجاد حدود التكامل نقول:

$$\frac{جا س}{جتا س} = \frac{جتا س}{جتا س}$$

$$1 = جا س$$

$$\therefore س = \frac{\pi}{2} , \frac{3\pi}{2}$$

وهي حدود التكامل

$$\therefore م = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (جا س - جتا س) دس$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} [جا س - جتا س] دس$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \{جا س + جتا س\} دس$$

$$= \left\{ \frac{\pi}{2} جتا س + \frac{\pi}{2} جا س \right\} \bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}$$

$$= \left\{ \frac{\pi}{2} جتا س + \frac{\pi}{2} جا س \right\} \bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}$$

$$= \left\{ \frac{\pi}{2} جتا س + \frac{\pi}{2} جا س \right\} \bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{2} جتا س + \frac{\pi}{2} جا س$$

$$= \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \frac{\pi}{2} + \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \frac{\pi}{2} = \sqrt{2} \frac{\pi}{2} \text{ وحدة مساحة.}$$



مثال (٥):

أوجد  $\int (س - ٣) دس$  التعويض

نفرض أن  $ص = س - ٣$  ،  $س = ص + ٣$

$$\therefore دص = دس$$

$$\therefore \int (س - ٣) دس = \int (ص + ٣ - ٣) دص$$

$$= \int (ص) دص$$

$$= \frac{١}{٧} ص^٧ + \frac{٣}{٦} ص^٦ + ج$$

$$= \frac{١}{٧} (س - ٣)^٧ + \frac{١}{٢} (س - ٣)^٦ + ج$$

مثال (٦):

أوجد  $\int \frac{دس}{\sqrt{٢ - ظا س}}$  أولاً تعويض للتخلص من الجذر

نفرض أن  $ص = \sqrt{٢ - ظا س}$

$$\frac{دس}{\sqrt{٢ - ظا س}} = \frac{د(ظا س)}{\sqrt{٢ - ظا س}} = \frac{دص}{دس}$$

$$\frac{دس}{دص} = \frac{٢}{\sqrt{٢ - ظا س}}$$

$$دس = \frac{٢}{\sqrt{٢ - ظا س}}$$

$$\int \frac{دس}{\sqrt{٢ - ظا س}} = \int \frac{٢}{\sqrt{٢ - ظا س}} دس$$

$$= \int \frac{٢}{\sqrt{٢ - ظا س}} دص$$

$$= \int \frac{٢}{\sqrt{٢ - ظا س}} دص$$

ثانياً بالأجزاء

## التكامل وتطبيقاته



$$(1) \text{ ق} = \text{ص} \quad (2) \text{ د ق} = \text{د ص} \quad (3) \text{ د ه} = \text{أ ه ص د ص}$$

$$(4) \text{ ه} = \text{ه ص} \quad (2) \text{ د ق} = \text{د ص}$$

لكن أ ق د ه = ق ه - أ ه د ق

$$\therefore \text{أ ص ه ص د ص} = \text{ص ه ص} - \text{أ ه ص د ص}$$

$$(2) \quad \text{ص ه ص} - \text{ه ص} + \text{ج} = \dots$$

نعود الى (1) هكذا:

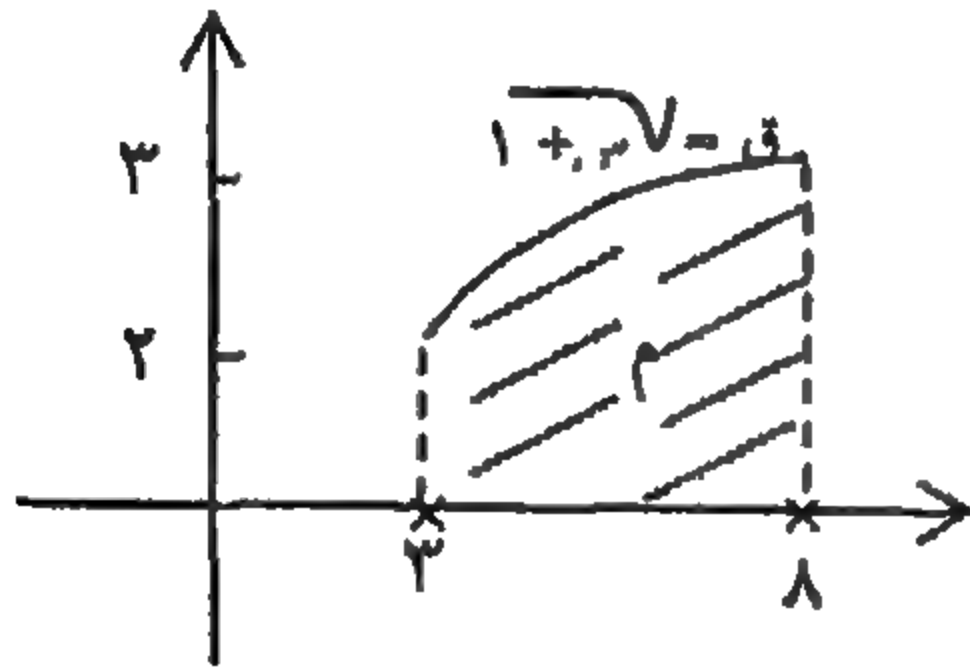
$$\text{أ ق أ س ه} \sqrt{\text{ظاس د س}} = 2 \text{ ص ه ص} - 2 \text{ ه ص} + \text{ج} \quad \text{ثم نعيد قيمة ص} = \sqrt{\text{ظاس}}$$

$$2 = \text{ظاس ه} \sqrt{\text{ظاس}} - 2 \text{ ه} \sqrt{\text{ظاس}} + \text{ج}$$

مثال (7):

احسب المساحة المحصورة بين منحنى ق (س)  $\sqrt{1+s}$  ،  $1 \leq \text{س} \leq 1$

ومحور السينات في الفترة [3 ، 8]



الحل:

$$\text{م} = \int_3^8 \sqrt{1+s} \, ds$$

$$= \int_3^8 \frac{1}{2} (1+s)^{\frac{1}{2}} \, ds$$

والتكامل بالتعويض:

$$\begin{aligned} 9 &= 1 + 8 \quad \text{الحد الأعلى} \\ 4 &= 1 + 3 \quad \text{الحد الأسفل} \end{aligned} \quad \text{ص} = 1 + \text{س}$$

$$1 = \frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$$

$$\text{د ص} = \text{د س}$$



## التكامل وتطبيقاته



$$\int_2^8 (1+s)^{\frac{1}{2}} ds = \int_2^8 \left( \frac{1}{\sqrt{s}} + \frac{1}{3} \right) ds = \left[ \frac{2}{\sqrt{s}} + \frac{s}{3} \right]_2^8 = \frac{2}{3} \left( \sqrt{8} - \sqrt{2} \right) + \frac{8}{3} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \left( \sqrt{8} - \sqrt{2} + 3 \right)$$

$$\left\{ \sqrt{4 \times 4 \times 4} - \sqrt{9 \times 9 \times 9} \right\} \frac{2}{3} = \left[ \sqrt{s} - \frac{2}{3} \right]_2^8 = \left( \sqrt{8} - \frac{2}{3} \right) - \left( \sqrt{2} - \frac{2}{3} \right) = \sqrt{8} - \sqrt{2}$$

$$\frac{38}{3} = (19) \left( \frac{2}{3} \right) = \{8 - 27\} \frac{2}{3} = \{2 \times 2 \times 2 - 3 \times 3 \times 3\} \frac{2}{3} =$$

وحدة مساحة

مع ملاحظة أنه يمكن تكامل كثير الحدود الخطي  $(1+s)^{\frac{1}{2}}$

$$\left\{ \text{مباشرة هكذا: } \int_2^8 (1+s)^{\frac{1}{2}} ds = \frac{1}{\frac{3}{2}} \times \frac{(1+s)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right\}$$

$$\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times (1+s)^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{9} (1+s)^{\frac{3}{2}}$$

مثال (٨):

أوجد  $\int_2^8 s^2 ds$  اقتران أسّي.

بما أن المعامل  $s$  يظهر في مشتقة الأس  $(s^2)$  فإنه يكامل بقانون

الاقتران الأسّي ولكن بعد ترتيبه هكذا:

$$\frac{1}{8} \int_2^8 s^2 ds = \frac{1}{8} \times \frac{s^3}{3} = \frac{s^3}{24} \quad \text{جـ} \quad \{ \text{أصبح المعامل } 8 \text{ مشتقة الأس } s^2 \}$$

ويمكن حل السؤال بالتعويض أيضاً.

مثال (٩):

أوجد  $\int_2^8 s ds$  الأجزاء ولأكثر من مرة

نفرض:

$$(1) \quad q = s^2 \quad \text{أد هـ} = \int_2^8 s ds$$

$$(2) \quad dq = 2s ds \quad \text{هـ} = \int_2^8 s ds$$





بما أن  $ق = د هـ = ق هـ - ا هـ = د ق$

∴  $ا س^2 جتا س د س = س^2 جتا س - ا^2 س جتا س د س$

$= س^2 جتا س - ا^2 س جتا س د س$  (١)

وبنفس الأسلوب نجد  $ا س جتا س د س$  بالأجزاء مرة أخرى:

(١)  $ق = س$   $ا د هـ = ا جتا س د س$

(٢)  $د ق = د س$   $هـ = - جتا س$

∴  $ا س جتا س د س = - س جتا س - ا - جتا س د س$

$= - س جتا س + ا جتا س د س$

$= - س جتا س + جتا س + ج$  (٢)

نعود إلى (١) هكذا:

∴  $ا س^2 جتا س د س = س^2 جتا س - ا^2 س جتا س + جتا س ا + ج$

$= س^2 جتا س + ا^2 س جتا س - ا جتا س + ج$

ملحوظة:

ان  $ا س^n جتا س د س$  أو  $ا س^n جتا س د س$  يكامل بالأجزاء

لعدد من المرات  $n = (ا س س)$

مثال (١٠):

أوجد  $ا هـ^3 جتا س د س$  "تكامل متكرر"

نفرض:

$ق = هـ^3$   $ا د هـ = ا جتا س د س$

$د ق = هـ^3 د س$   $هـ = جتا س$





∴  $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$  بالأجزاء

$$= \int \frac{1}{x^2} dx - \int \frac{1}{x^2} dx \quad (1)$$

وكذلك  $\int \frac{1}{x^2} dx$  بالأجزاء

$$\int \frac{1}{x^2} dx = \int \frac{1}{x^2} dx$$

$$\int \frac{1}{x^2} dx = \int \frac{1}{x^2} dx - \int \frac{1}{x^2} dx$$

$$\therefore \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C - \left( -\frac{1}{x} + C \right) \quad (2)$$

من (1)، (2)

$$\therefore \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C - \left( -\frac{1}{x} + C \right) + \int \frac{1}{x^2} dx$$

$$\therefore \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C + \int \frac{1}{x^2} dx - \left( -\frac{1}{x} + C \right) \quad (\text{الآن تكرر})$$

التكامل كما تلاحظ

$$\therefore \int \frac{1}{x^2} dx + \int \frac{1}{x^2} dx = \int \frac{1}{x^2} dx + \int \frac{1}{x^2} dx$$

$$\therefore 2 \int \frac{1}{x^2} dx = \int \frac{1}{x^2} dx + \int \frac{1}{x^2} dx$$

$$\therefore \int \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{2} \left( \int \frac{1}{x^2} dx + \int \frac{1}{x^2} dx \right) + C$$

مثال (11):

حل المعادلة التفاضلية التالية:

$$(i) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2}$$

تكامل الطرفين هكذا:

$$\int \frac{dy}{dx} = \int \frac{1}{x^2} dx \Rightarrow y = -\frac{1}{x} + C$$

$$- \frac{1}{x} + C = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \right) + C$$





$$- \text{ جتا ص} = \frac{2}{3} \sqrt[3]{\text{س}} + \text{ج}$$

$$\therefore \text{ جتا ص} = - \frac{2}{3} \sqrt[3]{\text{س}} + \text{ج}$$

$$(ii) \text{ س}^2 = \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} \text{ ص}^2$$

$$\text{وبالضرب التبادلي} \quad \frac{\text{س}^2}{\text{ص}^2} = \frac{\text{ص}^2}{\text{س}^2} = \frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$$

$$\text{لص}^2 - \text{د س} = \text{لص}^2 - \text{د س}$$

$$\frac{\text{ص}^2}{2} = \frac{\text{س}^2}{1} + \text{ج}$$

$$\therefore \left( \frac{1}{2} \text{ ص}^2 = \frac{1}{\text{س}} + \text{ج} \right)$$

$$\frac{1}{2} \text{ ص}^2 = \frac{1}{\text{س}} + \text{ج}$$

مثال (١٢):

يتناقص ثمن سيارة بمرور الزمن وبشكل منتظم، ويخضع هذا التناقص لقانون الاضمحلال، فإذا كان ثمنها الأصلي ١٠٠٠٠ دينار، ومعدل التناقص في ثمنها ٥% سنوياً، ما ثمنها بعد مرور ٢٠ عام؟

الحل:

نرتب المعطيات كما هو آت:

$$\text{ع} = 10000 \text{ دينار}$$

$$\text{ن} = 20 \text{ عام}$$

$$\text{أ} = -0.05$$

التكامل وتطبيقاته



$$ع(٢٥) = ٠.٥ \times ه = ١٠٠٠٠ \times ه = ٢٠ \times ٠.٥$$

$$١٠٠٠٠ \times ه = ١.٠٠$$

$$٣٦٧٦ \text{ دينار} = \frac{١٠٠٠٠}{٢.٧٢} = \frac{١}{٢.٧٢} \times ١٠٠٠٠ =$$

مثال (١٣):

إذا كان اقتران السعر - الطلب لمنتج معين هو  $ع = ق(س) - ٢٠$  س<sup>٢</sup>

واقتران السعر - العرض لهذا المنتج هو  $ع = ه(س) - ٢$  س<sup>٢</sup>

أوجد كمية وسعر التوازن وفائض المستهلك عند سعر التوازن.

الحل:

عند التوازن:

$$ق(س) = ه(س)$$

$$٢٠ - س^٢ = س^٢ + ٢$$

$$٢ - س^٢ = ٢٠ - ٢٠$$

$$٢ - س^٢ = ١٨$$

$$٩ = \frac{١٨}{٢} = س^٢$$

$$س = ٣ \quad \text{كمية التوازن}$$

$$ع = ٢٠ - (٣)^٢ = ٩ - ٢٠ = ١١$$

$$\text{أو} \quad ١١ = ٢ + (٣)^٢$$

$$\text{فك} = \int ق(س) دس - \int ه(س) دس = \int (٢٠ - س^٢) دس - \int (س^٢ + ٢) دس$$

$$= ٢٠س - \frac{س^٣}{٣} - \left( \frac{س^٣}{٣} + ٢س \right) = ٢٠(١١) - (٣)$$





$$= 60 - \frac{(3)^2}{3} - 33 = 33 - 60 = 33,9 = 33 - 51 = 18 \quad \text{دينار}$$

مثال (١٤):

$$\text{أوجد } \int \frac{s^3 + 1}{(s - 1)(s^3 + 1)} ds$$

نبسط هذا السؤال بالتحليل هكذا:

$$\int \frac{1}{s - 1} ds = \int \frac{s^3 + 1}{s^3 - s^2 + 1} ds$$

$$= \int \frac{1}{s - 1} ds \quad \text{ليصبح البسط مشتقه المقام}$$

$$= \ln(s - 1) + C$$

مثال (١٥):

$$\text{أوجد (i) } \int \frac{1}{s^2 + 1} ds \quad \text{"نذيب القوة جزئياً كونها فردية من المتطابقة"} \\ \int \frac{1}{s^2 + 1} ds = \int \frac{1}{s^2 + 1} ds$$

هكذا:

$$\int \frac{1}{s^2 + 1} ds = \int \frac{1}{s^2 + 1} ds$$

$$= \int \frac{1}{s^2 + 1} ds \quad \text{"تفكيك الأسس"}$$

$$\text{لكن } \int \frac{1}{s^2 + 1} ds = \int \frac{1}{s^2 + 1} ds$$

$$\therefore \int \frac{1}{s^2 + 1} ds = \int \frac{1}{s^2 + 1} ds$$

$$\therefore \int \frac{1}{s^2 + 1} ds = \int \frac{1}{s^2 + 1} ds$$

$$= \int \frac{1}{s^2 + 1} ds \quad \text{الإذابة الجزئية}$$



ثم نكمل حل السؤال بالتعويض كما يلي:

نفرض  $ص = جتا س$

$$\therefore د ص = - جاس د س$$

$$\text{ومنها } د س = \frac{1}{جاس}$$

$$\therefore \int جاس د س = \int جاس (1 - 2 ص^2 + ص^4) \times \frac{1}{جاس} د ص$$

$$= \int (-1 + 2 ص^2 - ص^4) د ص$$

$$= - ص + \frac{2}{3} ص^3 - \frac{1}{5} ص^5 + ج$$

$$= - جتا س + \frac{2}{3} جتا^3 س - \frac{1}{5} جتا^5 س + ج$$

(ii)  $\int جتا^2 س د س$  تذيب القوة كلياً كونها زوجية من المتطابقة

$$جتا^2 س = جتا^2 س - جاس^2$$

$$= 2 جتا^2 س - 1$$

$$= 1 - 2 جاس^2$$

$$= \int جتا^2 س = \int جتا^2 س د س$$

$$\text{لكن } جتا^2 س = 2 جتا^2 س - 1$$

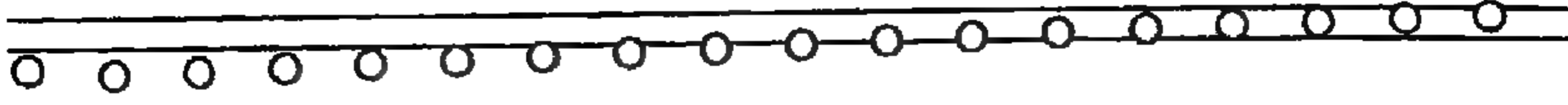
$$2 جتا^2 س = 1 + جتا^2 س$$

$$\text{ومنها } جتا^2 س = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} جتا^2 س$$

$$\therefore \int جتا^2 س د س = \int \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} جتا^2 س \right) د س = \frac{1}{2} ص + \frac{1}{2} \int جتا^2 س د س$$

$$= \frac{1}{2} ص + \frac{1}{2} جتا^2 س + ج$$

لكن



$$\text{جتا}^2 \text{س} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{جتا}^2 \text{س}$$

وعند وضع 2 س بدلاً من س في الطرفين:

$$\therefore \text{جتا}^2 2 \text{س} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{جتا}^2 4 \text{س} \text{ مفوضها فيما يلي:}$$

$$\therefore \int \text{جتا}^2 \text{س} د \text{س} = \int \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{جتا}^2 2 \text{س} \right) \frac{1}{2} د \text{س} = \frac{1}{4} \text{جتا}^2 2 \text{س} + \frac{1}{4} \int \text{جتا}^2 4 \text{س} د \text{س}$$

$$= \frac{1}{4} \left( \text{جتا}^2 2 \text{س} + \frac{1}{2} \text{جتا}^2 4 \text{س} \right) د \text{س}$$

$$= \frac{1}{4} \left( \text{جتا}^2 2 \text{س} + \frac{3}{2} \text{جتا}^2 4 \text{س} \right) \text{الاذابة كلية}$$

$$\text{وبما أن } \int \text{جتا}^2 \text{س} د \text{س} = \frac{1}{2} \text{جتا}^2 \text{س} + \frac{1}{2} \int \text{جتا}^2 2 \text{س} د \text{س} \text{ "و / أو بالتعويض"}$$

$$\therefore \int \text{جتا}^2 \text{س} د \text{س} = \frac{3}{4} \text{جتا}^2 \text{س} + \frac{1}{4} \int \text{جتا}^2 4 \text{س} د \text{س} + \text{ج}$$

$$= \frac{3}{4} \text{جتا}^2 \text{س} + \frac{1}{4} \int \text{جتا}^2 2 \text{س} د \text{س} + \text{ج}$$

مثال (١٦):

أوجد  $\int \text{قا}^2 \text{س} د \text{س}$

الحل:

$$\int \text{قا}^2 \text{س} د \text{س} = \int \text{قا}^2 \text{س} \cdot \text{قا}^2 \text{س} د \text{س} \text{ فكك الأسس}$$

$$\text{لكن } \text{قا}^2 \text{س} = \text{ظا}^2 \text{س} + 1 \text{ من جتا}^2 \text{س} = 1$$

والقسمة على جتا<sup>2</sup>س

$$\therefore \int \text{قا}^2 \text{س} د \text{س} = \int \text{قا}^2 \text{س} (\text{ظا}^2 \text{س} + 1) د \text{س}$$

$$= \int \text{قا}^2 \text{س} \text{ظا}^2 \text{س} د \text{س} + \int \text{قا}^2 \text{س} د \text{س}$$

$$= \int \text{قا}^2 \text{س} \text{ظا}^2 \text{س} د \text{س} + \int \text{قا}^2 \text{س} د \text{س}$$



لكن أقاء س د س = ظا س ..... (١)

وأما أقاء س ظا س فيتم بالتعويض هكذا:

نفرض ص = ظا س

د ص = أقاء س د س

$$\therefore د س = \frac{1}{أقاء س} د ص$$

$\therefore$  أقاء س ظا س د س

$$= أ ص \cdot \frac{1}{أقاء س} \times \frac{1}{أقاء س} د ص$$

$$= أ ص د ص$$

$$= \frac{ص^2}{3} + ج$$

$$= \frac{ظا س^2}{3} + ج ..... (٢)$$

وبعد دمج (١) مع (٢) ينتج:

$$أقاء س د س = ظا س + \frac{1}{3} ظا س^2 + ج$$

مثال (١٧):

$$أوجد أ \frac{\sqrt{س}}{س - ١} د س$$

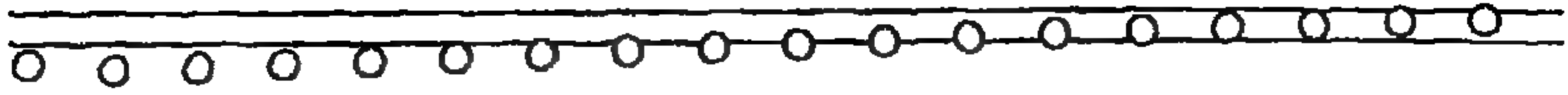
أولاً بالتعويض:

نفرض أن ص =  $\sqrt{س}$   $\leftarrow$  ص<sup>٢</sup> = س

$$\therefore د ص = \frac{1}{2\sqrt{س}} د س \text{ ومنها } د س = 2\sqrt{س} د ص$$

$$\therefore أ \frac{\sqrt{س}}{س - ١} د س$$

## التكامل وتطبيقاته



$$\int \frac{ص}{1 - ص^2} = (2 ص) د ص$$

ثم القسمة الطويلة حيث درجة البسط = درجة المقام

$$\frac{2}{1 - ص^2} = \frac{2 \pm \cancel{ص^2} \pm 2}{2}$$

$$\therefore \int \frac{2 ص^2}{1 - ص^2} د ص = \int \left( \frac{2}{1 - ص^2} + 2 \right) د ص$$

$$\text{ثم نجزيه} \quad \frac{2}{1 - ص^2} = \frac{أ}{1 + ص} + \frac{ب}{1 - ص}$$

$$\frac{أ(1 + ص) + ب(1 - ص)}{(1 + ص)(1 - ص)} = \frac{2}{1 - ص^2}$$

لإعدام أ نعوض ص = 1

$$2 = 2 \leftarrow ب = 1$$

لإعدام ب نعوض ص = -1

$$2 = 2 \leftarrow أ = 1$$

$$\therefore \int \frac{2 ص^2}{1 - ص^2} د ص = \int \left( \frac{1}{1 + ص} + \frac{1}{1 - ص} - 2 \right) د ص$$

$$= 2 ص - \ln(1 + ص) + \ln(1 - ص) - 2 ص = \frac{1}{\ln(1 - ص)} + \frac{1}{\ln(1 + ص)} - 2 ص$$

$$= 2 ص - \ln(1 + ص) + \ln(1 - ص) - 2 ص$$





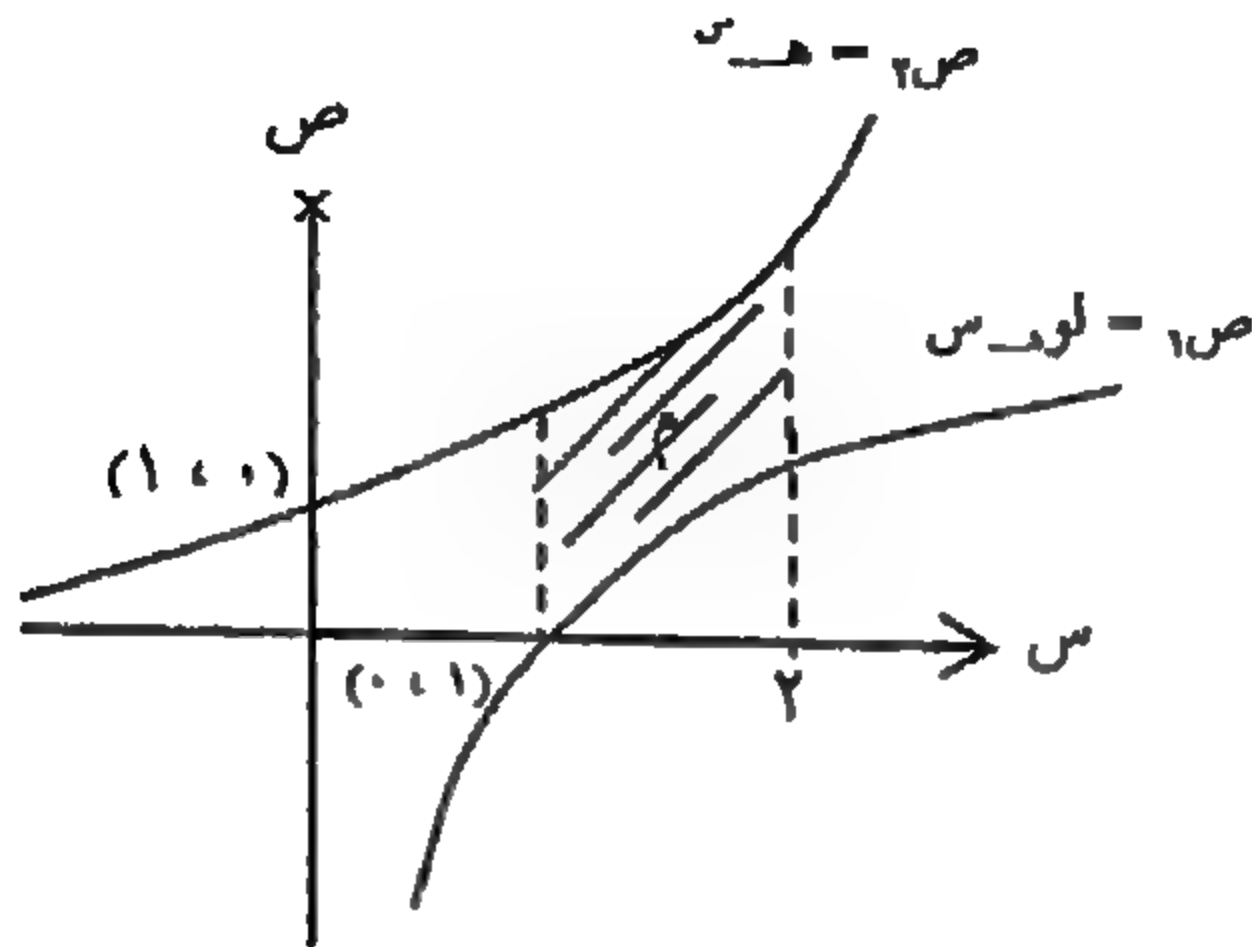


مثال (١٨):

أوجد المساحة المحصورة بين منحنيني

$$ص_١ = لوس ، ص_٢ = هـ$$

والمستقيمين  $س = ١$  ،  $س = ٢$



$$م = \int_1^2 (هـ - لوس) دس$$

$$= \int_1^2 هـ دس - \int_1^2 لوس دس$$

$$= هـ \int_1^2 دس - \int_1^2 لوس دس$$

وهذا التكامل بالأجزاء ..... (١)

$$(١) ق = لوس \quad (٢) دق = \frac{١}{س} \quad (٣) د هـ = ل د س$$

$$(٤) هـ = س$$

قاعدة التكامل بالأجزاء

$$لكن ل ق د هـ = ق هـ - ل هـ د ق$$

$$\therefore \int_1^2 لوس دس = س لوس \int_1^2 دس - \int_1^2 س \times \frac{١}{س} دس$$

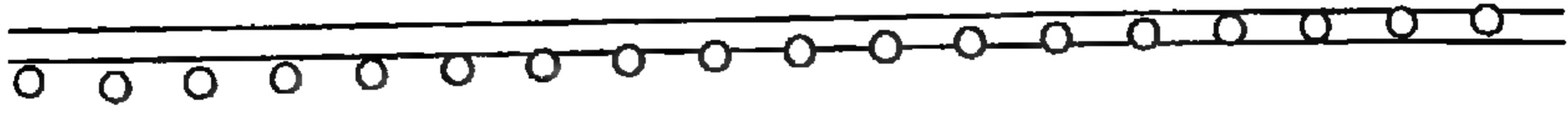
$$= س لوس - \int_1^2 ١ دس$$

$$= س لوس - س \int_1^2 دس \quad (٢) \dots\dots\dots$$

وبعد دمج (١) مع (٢) ينتج أن:

$$م = هـ \int_1^2 دس - س لوس \int_1^2 دس + س \int_1^2 دس$$

### التكامل وتطبيقاته



$$\therefore M = (H^2 - 2L^2) - (H - L + 1) =$$

$$= H^2 - 2L^2 + H - L + 1 =$$

$$= H^2 - 2L^2 + H - L + 1 =$$

$$= H^2 - 2L^2 + H - L + 1 =$$

$$= H^2 - 2L^2 + H - L + 1 =$$

$$\text{"أي"} (2.72)^2 - 1 + (2.72) - L = \text{وحدة مساحة.}$$

مثال (١٩):

إذا كان  $Q = \sqrt{9 - S^2}$  قابلاً للتكامل في  $[-2, 3]$  بين دون  
اجراء التكامل أن  $0 \leq Q \leq 18$  (س) دس  $18 \geq$

الحل:

نحصر الاقتران  $Q = \sqrt{9 - S^2}$  بين عددين يمثل أحدهما أصغر قيمة له في  
الفترة  $[-2, 3]$  والثاني أكبر قيمة له في الفترة.



عندما  $S = 3$

فإن  $Q = \sqrt{9 - 9} = 0$  أصغر قيمة للاقتران

وعندما  $S = 0$

فإن  $Q = \sqrt{9 - 0} = 3$  أكبر قيمة للاقتران.

$$\therefore 0 \leq Q \leq 3 \text{ في الفترة } [-2, 3]$$

$$\therefore 0 \leq \sqrt{9 - S^2} \leq 3$$

وبتكامل طرفي المتباينة دون وسطها هكذا:





$$\int_{-2}^2 0 \, ds \geq \int_{-2}^2 \sqrt{s^2 - 9} \, ds \geq \int_{-2}^2 3 \, ds$$

$$\therefore (3 - 3) \cdot 2 \geq \int_{-2}^2 \sqrt{s^2 - 9} \, ds \geq (3 - 3) \cdot 2$$

$$(6) \cdot 0 \leq \int_{-2}^2 \sqrt{s^2 - 9} \, ds \leq (6) \cdot 2$$

$$\text{ومنها صفر} \leq \int_{-2}^2 \sqrt{s^2 - 9} \, ds \leq 18 \quad \text{وهذا المطلوب}$$

مثال (٢٠):

(i) إذا كانت سرعة جسم تعطى بالعلاقة  $e = 5n^4 + 6n^2$  ما المسافة التي

يقطعها الجسم بعد ثانيتين من حركته؟ علماً بأنه قد قطع مسافة ١٠ متر

بعد الثانية الأولى من حركته.

$$\text{بما أن } e = 5n^4 + 6n^2$$

$$\text{وان } f = \int e \, dn = \int (5n^4 + 6n^2) \, dn$$

$$f = \frac{5n^5}{5} + \frac{6n^3}{3} = n^5 + 2n^3$$

$$\text{لكن } f|_{n=1} = 1^5 + 2(1)^3 = 3 = f|_{n=0} \quad \text{لكن } 10 = f|_{n=2} - f|_{n=0}$$

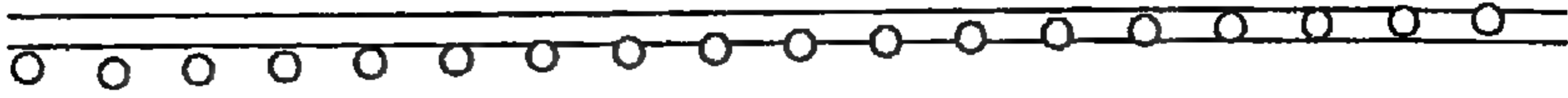
$$\text{ومنها } 10 = 2^5 + 2(2)^3 - 3$$

$$\therefore 7 = 2^5 + 2(2)^3 - 3$$

$$\therefore f = 2^5 + 2(2)^3 - 3 = 7$$

$$\therefore f|_{n=2} = 2^5 + 2(2)^3 - 3 = 7 + 16 + 32 = 55 \text{ متراً}$$





(ii) اذا كان ميل المماس للمنحنى ق (س) عند النقطة أ (١ ، ٥) يساوي ٤

وكانت ق (س) = ١٢ س - ٨ أوجد قاعدة ق (س)

الحل:

بما أن ق (س) = أ ق (س) د س = أ (١٢ س - ٨) د س = ٦ س<sup>٢</sup> - ٨ س + جـ

∴ ق (س) = ٦ س<sup>٢</sup> - ٨ س + جـ المشتقة الأولى

ولما كان ميل المماس = ق (١)

∴ ق (١) = ٦ (١)<sup>٢</sup> - ٨ (١) + جـ = ٤

∴ ٦ - ٨ + جـ = ٤

∴ جـ = ٦

لكن ق (س) = أ ق (س) د س = أ (٦ س<sup>٢</sup> - ٨ س + ٦) د س

∴ ق (س) = ٢ س<sup>٣</sup> - ٤ س<sup>٢</sup> + ٦ س + جـ

= ٢ س<sup>٣</sup> - ٤ س<sup>٢</sup> + ٦ س + جـ

وبما أن الاقتران يمر بالنقطة أ (١ ، ٥) كونها نقطة التماس الواقعة عليه

∴ ق (١) = ٥

∴ ق (١) = ٢ (١)<sup>٣</sup> - ٤ (١)<sup>٢</sup> + ٦ (١) + جـ = ٥

ومنه ٢ - ٤ + ٦ + جـ = ٥



## التكامل وتطبيقاته



∴ ج = ١

قاعدة الاقتران

$$\therefore \text{ق (س)} = ٢ \text{س}^٢ - ٤ \text{س}^٢ + ٦ \text{س} + ١$$





(٢٢ - ٧) أسئلة وتدريبات وتمارين تتطلب حلولاً من الدارسين والدارسات

(١) أوجد  $\int (٣س + ٢) دس$

(٢) احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران:

ق (س) =  $٢س - ٣س + ١$  والمحورين

(٣) احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق (س) =  $س$  ومماسه عند  $س = ٣$  ومحور السينات.

(٤) احسب مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنى ق (س) =  $س + ٤$  والمنحنى هـ (س) =  $٦ - س$

(٥) أوجد قيمة  $\int \frac{١ + س + س}{١ + س + س} دس$   $\left\{ \frac{٥}{٦} \right\}$

استعن بالقسمة الطويلة

(٦) أوجد المساحة المحصورة بين المنحنيين ق (س) =  $\sqrt{س}$  ، هـ (س) =  $س$

$\left\{ \frac{١}{٣} \right\}$  وحدة مساحة

(٧) أجرِ التكاملات التالية:

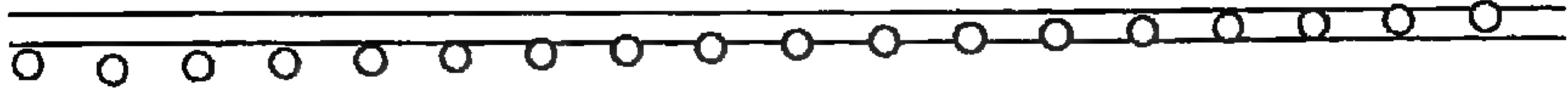
(١)  $\int \frac{٥س}{٩ + س} دس$   $\left\{ \frac{٥}{٤} \log(٩ + س) + ج \right\}$

{ ارشاد: تعويض أو البسط يظهر في مشتقه المقام  $\Leftarrow$  اقتران لوغاريتمي }

(٢)  $\int \frac{س}{\sqrt{١ - س}} دس$   $\left\{ -\sqrt{١ - س} + ج \right\}$

(٨) ما قيمة  $\int_{\frac{\pi}{٢}}^{\pi} س \cos س دس$   $\left\{ \left( \frac{\sqrt{٣}}{٣} - \frac{١}{٤} \right) \pi \log ٢ \right\}$

{ ارشاد: بالأجزاء }



(٩) أوجد  $\int \sqrt{\cos x} \, dx$

{ بالتعويض ثم الأجزاء }

$$\sqrt{\cos x} = \cos \frac{x}{2}$$

(١٠) أوجد  $\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx$

{ بالتعويض ثم الأجزاء }

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$\left\{ \frac{1}{8} \sin^4 x + \frac{1}{8} \sin^2 x \cos^2 x - \frac{1}{8} \cos^4 x + \frac{1}{8} \cos^2 x \right\}$$

(١١) أوجد  $\int \frac{1}{\sin^2 x - \cos^2 x} \, dx$

{ بالكسور الجزئية }

$$\left\{ \frac{1}{12} \ln \left| \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} \right| + \frac{1}{12} \right\}$$

(١٢) أوجد  $\int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x - \cos^2 x} \, dx$

{ البسط مشتقه المقام }

اقتران لوغارتمي

$$\left\{ \ln \left( \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} \right) - (1 - \cos^2 x) \right\}$$

{ بالأجزاء }

(١٣) أوجد قيمة  $\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx$

$$\left\{ \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \cos 4x \right\}$$

(١٤) أجز التكاملات التالية:

$$(١) \int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx \quad \left\{ \frac{1}{\sin^2 x} + \cos x, \text{ تعويض أو اقتران نسبي} \right\}$$

$$(٢) \int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx \quad \left\{ -\frac{1}{\sin x} + \cos x, \text{ تعويض} \right\}$$





$$(3) \int \text{جا}^2 \text{س د س} \left\{ \frac{1}{2} \text{س} - \frac{1}{4} \text{جا}^2 \text{س} + \text{ج} , \text{اذابة القوى} \right\}$$

$$(4) \int \text{جتا}^2 \text{س د ج س} \left\{ \frac{1}{2} \text{س} + \frac{1}{4} \text{جا}^2 \text{س} + \text{ج} , \text{اذابة القوى} \right\}$$

$$(5) \int \frac{\text{س}}{\text{س}^2 + \text{أ}} \text{د س} \left\{ \frac{1}{2} \text{لوم} (\text{س}^2 + \text{أ}) + \text{ج} , \text{البسط مشتقه} \right\}$$

المقام أو تعويض

$$(6) \int \frac{\text{س}}{\sqrt{\text{س}^2 + \text{أ} + \text{ج}}} \text{د س} \left\{ \sqrt{\text{س}^2 + \text{أ} + \text{ج}} , \text{تعويض} \right\}$$

$$(7) \int \sqrt{\text{س}} (\sqrt{\text{س}} + 1) \text{د س} \left\{ \frac{2}{3} \sqrt{\text{س}} + \frac{1}{2} \text{س}^{\frac{3}{2}} , \text{القانون} \right\}$$

$$(8) \int (\text{جتاس} + \text{قاس})^2 \text{د س} \left\{ \frac{5}{2} \text{س} + \frac{1}{4} \text{جا}^2 \text{س} + \text{ظاس} + \text{ج} \right\}$$

$$(9) \int \text{س}^3 \sqrt{\text{س}^3 + 1} \text{د س}$$

$$(10) \int \frac{\text{جتا}^2 \text{س}}{1 + \text{جاس}} \text{د س}$$

$$\{ \text{س} + \text{جتاس} + \text{ج} , \text{استبدل جتا}^2 \text{س} = 1 - \text{جاس} \text{ثم س} \}$$

$$(11) \int \text{س}^6 \left( \frac{1}{\text{س}} - 1 \right)^5 \text{د س}$$

$$\{ (\text{س} - 1)^6 + \text{ج} , \text{أدخل س}^6 \text{داخل القوس} \}$$

$$(12) \int (1 + \text{ظا}^2 \frac{\text{س}}{2}) \text{د س} \left\{ 2 \text{ظا} \frac{\text{س}}{2} + \text{ج} , \text{استعن بالمتطابقة} \right\}$$

قاس = 1 + ظاس

$$(13) \int \text{جاس جتا س د س} \left\{ -\frac{1}{4} \text{جتا}^2 \text{س} + \text{ج} \right\}$$

$$(14) \int (\text{س}^4 + \text{س}^2 + 1) \text{د س} \left\{ \frac{2}{10} (\text{س}^2 + 1)^5 + \text{ج} , \text{فك القوس أو} \right\}$$

حواله الى اقتران خطي

# التكامل وتطبيقاته



$$(15) \int \frac{\text{جتا } 2\text{س}}{\text{جتا س} + \text{جا س}} د\text{س} \quad \{\text{جاس} + \text{جتاس} + \text{ج} , \text{استعن بالمتطابقة}\}$$

$$\{\text{جتا } 2\text{س} = \text{جتا } 2\text{س} - \text{جا } 2\text{س}\}$$

$$(16) \int (\text{جاس} + \text{جتاس})^2 د\text{س} \quad \{\text{س} - \frac{1}{2} \text{جتا } 2\text{س} + \text{ج} , \text{فك القوس}\}$$

$$(17) \int \text{جتاس} (\text{جاس} + \text{ظاس}) د\text{س} \quad \{-\frac{1}{2} \text{جتا } 2\text{س} - \text{جتاس} + \text{ج}\}$$

$$(18) \int \frac{\text{جتا } 2\text{س}}{2\sqrt{-\text{جاس}}} د\text{س} \quad \{\text{س} - \sqrt{-\text{جاس}} + \text{ج}\}$$

استعن بالمتطابقة جتا<sup>2</sup>س = 1 - جا<sup>2</sup>س والتحليل {

(15) اذا كان ميل المماس للمنحنى ق (س) عند أي نقطة عليه (س ، ص) يساوي

$2 - \frac{1}{\text{س}}$  وكان المنحنى يمر بالنقطة  $(1, -\frac{1}{2})$  أوجد قاعدة الاقتران ق (س)

$$\{\text{ق (س)} = 2\text{س} + \frac{1}{\text{س}} - 2\}$$

(16) اذا كان ميل المماس للمنحنى ق (س) عند أي نقطة عليه (س ، ص) يساوي

$3\text{س}^2 - 6\text{س} - 9$  والقيمة العظمى المحلية له هي 17 ، أوجد القيمة الصغرى المحلية له.

$$\{-15\}$$

(17) إذا:

$$(1) \text{ علمت أن ص} = \int (3\text{س}^2 - \text{س}) د\text{س} \text{ فأوجد } \frac{د\text{ص}}{د\text{س}} \quad \{3\text{س}^2 - \text{س}\}$$

$$(2) \text{ علمت أن } \int_1^5 \frac{1}{\text{س}} د\text{س} = 10 \text{ فما قيمة هـ} \quad \{3\}$$

$$(3) \text{ كان } \int_1^5 \frac{1}{\text{س}} د\text{س} = 15 \text{ فإن } \int_1^5 (\text{ق (س)} - 5) د\text{س} = \{7\}$$

(4) كان الايراد الحدي لسلعة يعطى بالعلاقة د (س) = 4س - 1 فإن قيمة

الايراد الكلي عندما س = 5 هو {45 دينار}





(١٨) اذا كان منحنى اقتران السعر - العرض معطى بالعلاقة:

$$ع = هـ (س) = \frac{1}{3} س^2 + ٤ \text{ وثبت السعر عندما } ع = ٣١$$

احسب فائض المنتج؟

(١٩) ينحل عنصر مشع تبعاً لقانون الاضمحلال التالي  $ع_n = ع_0 \times هـ^{ان}$  حيث

$هـ = ٢,٧$  ،  $ع_n$  الكتلة المتبقية منه بعد  $n$  سنة ،  $ع_0$  الكتلة عند بدء هذا

الزمن. فإذا علمت أن:

$$ع = ١٠٠ \text{ غم} ، \quad ٠,٠٥ = ١ - هـ^{ان}$$

$$ن = ٢٠ \text{ سنة}$$

$$\{ ٤٠,٨ \text{ غم} \}$$

أوجد  $ع_0$  (٢٠)

(٢٠) احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران  $ق(س) = ٦س - ٣س^2$

$\{ ٤ \text{ وحدات مساحة} \}$

ومحور السينات.

$$\{ جا ص \}$$

(٢١) أوجد: (١)  $\int_1^2 جا ص د س$

$$\{ هـ^{-٢} \}$$

$$(٢) \int_1^2 هـ^{-٢} د س$$

(٢٢) أجز التكاملات التالية:

$$(١) \int س جا س د س$$

$$(٢) \int س هـ س د س$$

$$(٣) \int س لورس د س$$

$$(٤) \int س جتا س د س$$

$$(٥) \int س ظا س د س$$

{ ارشاد: استعن بطريقة الأجزاء }



{ ٣ }

(٢٣) أوجد  $\int_1^2 [س] د س$

{ ٤ - }

ثم أوجد  $\int_1^2 [س - ١] د س$

{ ارشاد: اذا كان مُعامل س في اقتران صحيح س موجباً نعوض الحد الأسفل

واذا كان معامل س في اقتران صحيح س سالباً نعوض الحد الأعلى }

(٢٤) اذا كان  $\int_1^0 ق (س) د س = ٦$  ،  $\int_1^7 ق (س) د س = ١٣$

{ ٧ - }

أوجد قيمة  $\int_7^0 ق (س) د س$

{ ارشاد: استعن بخاصية الاضافة }

(٢٥) اذا كان  $ق (س) = \begin{cases} ٣ س^٢ , & ٠ \leq س \leq ٢ \\ ٥ - س , & ٢ < س \leq ٥ \end{cases}$

{ ٥٠ }

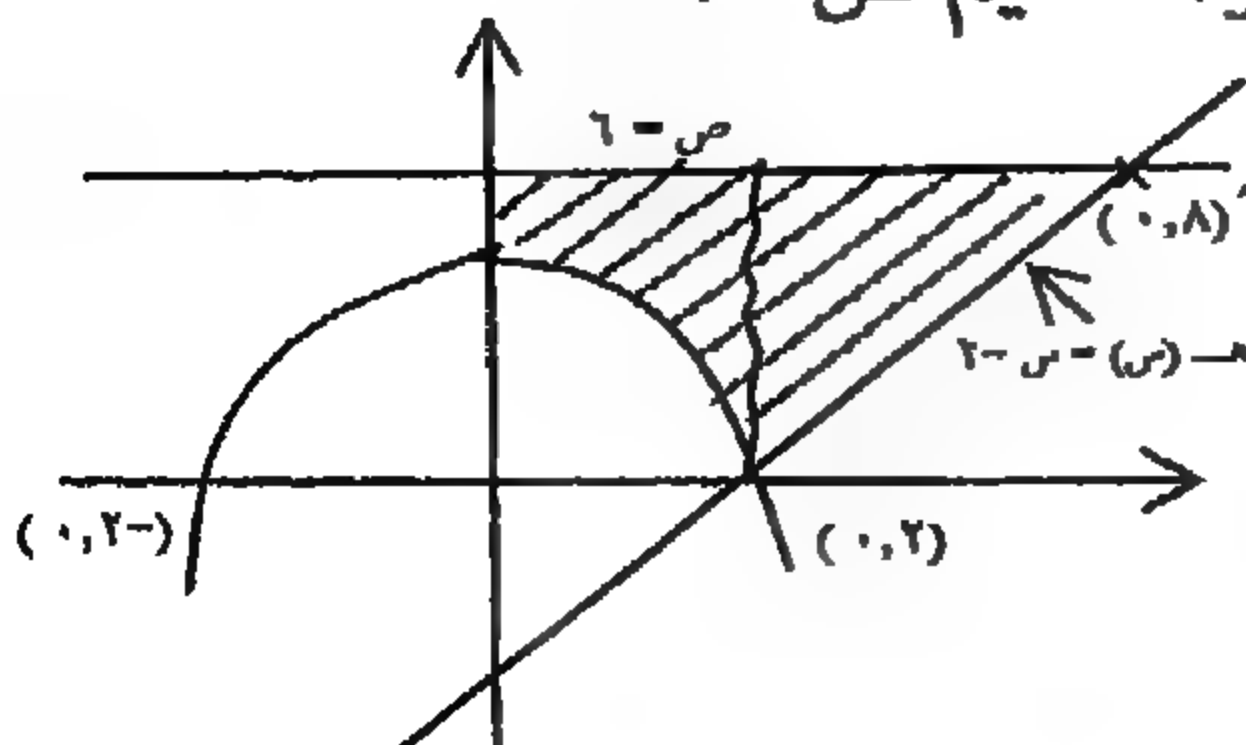
أوجد  $\int_0^5 ق (س) د س$

(٢٦) ان كانت  $ق (س)$  للاقتران  $ق (س)$  تساوي  $١٢ س^٢ + ٦ س - ٣٦$  أوجد قاعدة الاقتران  $ق (س)$  علماً بأنه يمر بالنقطة (١ ، - ٤) وان ميل المماس لمنحنى الاقتران عند هذه النقطة يساوي - ٥

{  $ق (س) = س^٤ + س^٢ - ١٨ س^٢ + ٢٤ س - ١٢$  }

(٢٧) احسب مساحة المنطقة المحدودة بالاقتران  $ق (س) = ٤ - س^٢$  والاقتران

هـ  $(س) = س^٢ - ٢$  ومحور الصادات والمستقيم  $ص = ٦$



استعن بالشكل المجاور

{  $\frac{٧٤}{٣}$  }



التكامل وتطبيقاته

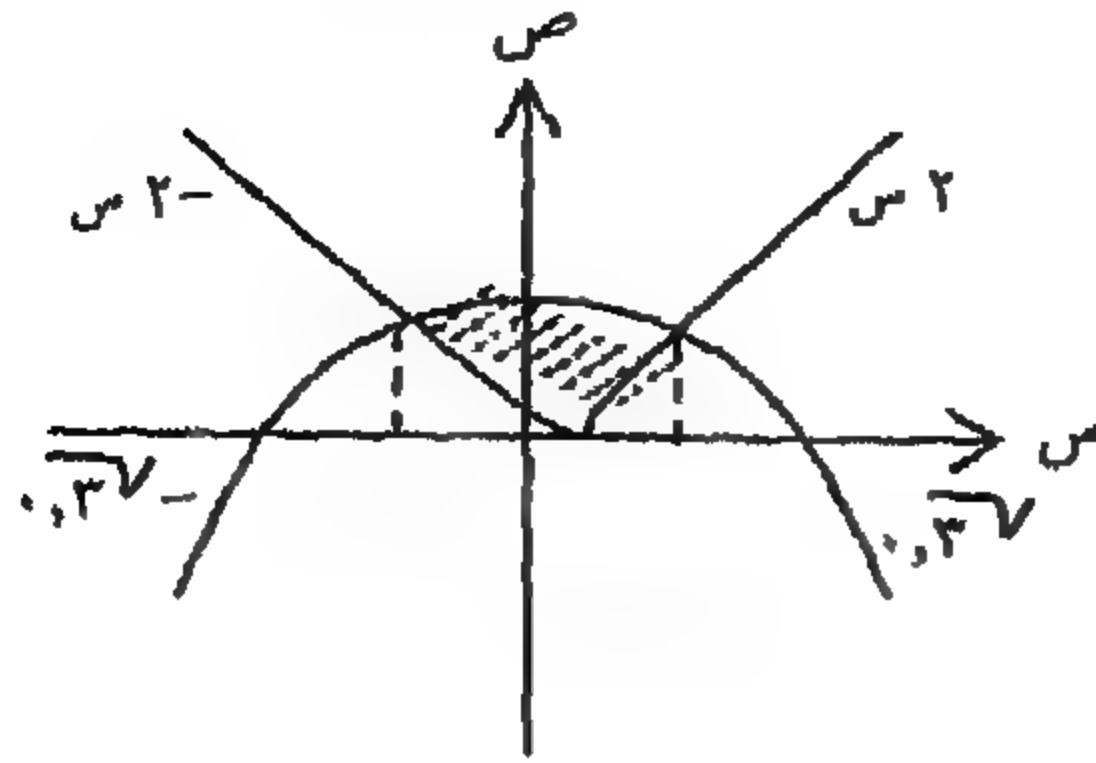


(٢٨) أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين الاقتران ق (س) = ٣ - س<sup>٢</sup> والاقتران

$$هـ (س) = |٢ س|$$

استعن بالشكل المجاور

$$\left\{ \frac{٣٧}{٦} \right\}$$



$$\{ ١ \}$$

(٢٩) أوجد  $\int \sqrt{١ + س٢ - س٢} دس$

{ ارشاد:  $\sqrt{١ + س٢ - س٢} = \sqrt{(١ - س)^٢} = |١ - س|$  ثم أعد التعريف }

(٣٠) أوجد  $\int \frac{١}{١ + س٢ + (١ - س٢)} دس$

$$\left\{ \frac{٢}{٣} \text{ لو } (\sqrt{١ + س٢} + ٢) + \frac{١}{٣} \text{ لو } (\sqrt{١ + س٢} - ١) + ج \right\}$$

{ ارشاد: تعويض ص = ١ + س٢ ثم كسور جزئية }

$$\{ ٤٥ \}$$

(٣١) ما قيمة  $\int (س٢ - ١) دس$  ؟

{ ارشاد: أعد تعريف الاقتران }

(٣٢) اذا كان ق (س) = س ، هـ (س) = ج س<sup>٢</sup> حيث ج < صفر يتقاطعان في

التطبيق (٠ ، ٠) ،  $\left( \frac{١}{ج} , \frac{١}{ج} \right)$  ما قيمة ج لتكون المساحة بين الاقترانين  $\frac{٢}{٣}$  وحدة مربعة.

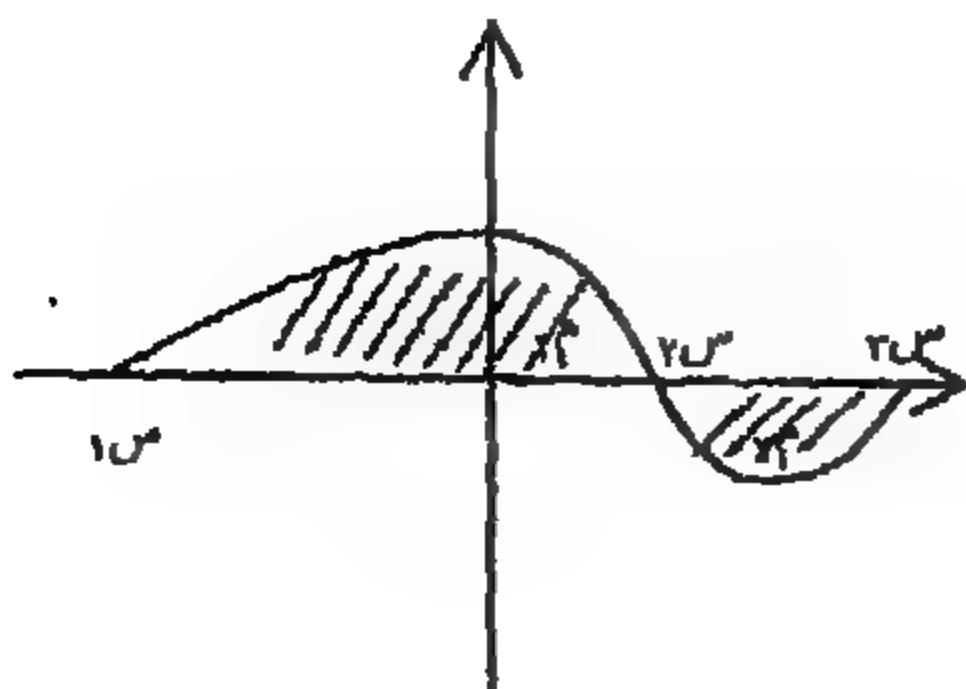
$$\left\{ \frac{١}{٢} \right\}$$

(٣٣) اعتمد على الشكل المجاور والذي

يمثل منحنى ق (س) متقاطعا في محور

السينات في س<sub>١</sub> ، س<sub>٢</sub> ، س<sub>٣</sub>

فإذا كان  $\int_{س١}^{س٢} ق (س) دس = ٢٠$





وكانت مساحة المنطقة م<sub>٢</sub> = ٥ وحدة مربعة فما مساحة المنطقة م<sub>١</sub> ؟

$$\{ ٢٥ \}$$

$$(٣٤) \text{ ما قيمة } \int_0^2 (3 - 2s) ds$$

$$\{ ٣.٤٣٢ \}$$

$$(٣٥) \text{ اذا كانت } \int_0^3 (3s^2 + 2s) ds = ١٠ \text{ أوجد } \frac{d}{ds}$$

$$\{ ٣س^٢ \}$$

$$\text{ص} = \int_0^3 (3s^2 + 2s) ds \text{ أوجد } \frac{d}{ds}$$

$$\{ \text{صفر} \}$$

$$(٣٦) \text{ اذا كان منحنى السعر - الطلب ع} = \text{ق (س)} = ٦٥ - ٣س$$

$$\text{وكان منحنى السعر - العرض ع} = \text{هـ (س)} = ٢٥ + س$$

أوجد فائض المستهلك وفائض المنتج.

$$(٣٧) \text{ اذا كان } \int_0^3 (3s^2 - 2س + ١) ds = ١٠ \text{ أوجد ق (١) } \{ ٣ - \}$$

{ ارشاد : اشتق الطرفين }

(٣٨) أجز التكاملات التالية :

$$(١) \int_0^1 (١٠س - ٢س^٢) ds \text{ تعويض } \left\{ \frac{١}{٣} (١٠س - ٢س^٢) + ج \right\}$$

$$(٢) \int_0^1 \frac{٣س^٢ - ٢س^٣}{٤س^٣ - ٣س^٢ - ٢س} ds \text{ كسور جزئية}$$

$$(٣) \int_0^1 (٣س^٢ + ٢س) ds \text{ تعويض}$$

(٣٩) أودع عدنان مبلغ ٥٠٠٠ دينار في حساب التوفير لدى أحد البنوك باسم ابنه

سنان بمعدل فائدة ٧٪ سنوياً، واحتسب البنك الفائدة باستمرار تبعاً لقانون

النمو، ما مجمل مبلغه بعد ٧ سنوات؟

(٤٠) أجز التكاملات التالية :

$$(١) \int_0^1 (٣س^٢ + ٢س) ds \text{ تعويض } \left\{ \frac{١}{٥} (٣س^٢ + ٢س) + ج \right\}$$

{ ارشاد : تعويض ص = جا س }

$$(2) \int \sin^2 x \cos^2 x \, dx \quad \left\{ -\frac{1}{4} \cos^2 x + \frac{1}{4} x + C \right\}$$

{ ارشاد: تعويض  $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$  }

$$(41) \int_0^{\pi} \sin^2 x \cos^2 x \, dx \quad \{ \text{صفر} \}$$

{ ارشاد: تعويض  $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$  }

$$(42) \int_0^1 \frac{\sin^2 x}{3(1 + \sin^2 x)} \, dx \quad \left\{ \frac{1}{16} \right\}$$

$$(43) \int \frac{\sin^4 x}{1 + \sin^2 x} \, dx \quad \left\{ \frac{1}{8} \cos^2 x + \frac{1}{8} x + C \right\}$$

{ ارشاد: البسط يظهر في مشتقه المقام }

$$(44) \text{ أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنىي الاقترانين } q(x) = \sin x, \text{ و } p(x) = \cos x \text{ في الفترة } [0, \frac{\pi}{2}]$$

$$(45) \text{ إذا كان } q(x) = \sin x \text{ و } p(x) = \cos x \text{ أوجد } \int_0^{\frac{\pi}{2}} (p(x) + q(x)) \, dx \quad \{ 1 \}$$

{ ارشاد: استعن بمفهوم التكامل  $\int q(x) \, dx = \int p(x) \, dx$  }

(46) أجز التكاملات التالية:

$$(1) \int \frac{\sin^5 x}{\cos^2 x} \, dx \quad \{ 5 \sin^4 x + \cos^2 x + C \}$$

$$(2) \int \sin^2 x \cos^2 x \, dx \quad \{ -\frac{1}{4} \cos^2 x + \frac{1}{4} x + C \}$$

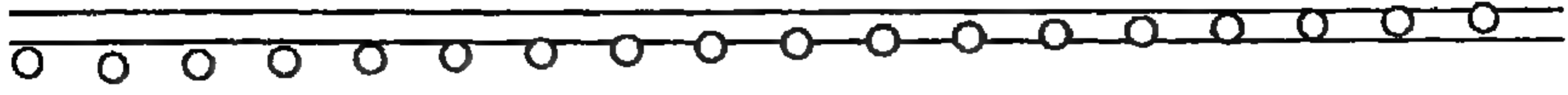
ثم احسب قيمة  $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} \, dx$

$$(47) \text{ إذا كان: } (1) \int_0^1 \sqrt{1-x^2} \, dx = \frac{\pi}{4} \text{ فما قيمة } k$$

$$(2) \int_0^1 \sqrt{1-x^2} \, dx = \frac{\pi}{4} \text{ فما قيمة } k$$

$$(3) \int_0^1 \sqrt{1-x^2} \, dx = \frac{\pi}{4} \text{ فما قيمة } k$$





(٤٨) إذا كانت  $q$  (س) = ٦ س هي مشتقة  $q$  (س) على الفترة  $[-٢, ٣]$  فما

قيمة  $q(٣) - q(-٢)$  ؟

{ ١٥ }

(٤٩) ما مساحة المنطقة المحدودة بالاقترانين  $q(س) = س^٤$  ،  $هـ(س) = \sqrt{س}$  ؟

(٥٠) أوجد  $\int \frac{س^٢ + ٣}{س^٢ + ٤س - ٥} دس$  { كسور جزئية }

{  $\frac{1}{٦} \ln(س + ٥) - \frac{1}{٦} \ln(س - ١) + C$  }

(٥١) ضع أحد الرموز التالية  $> , < , =$  داخل الدائرة في العبارة:

{  $=$  }  $\int_٢^٥ |س - ٤| دس$   $\int_٢^٥ |س - ٦| دس$

(٥٢) أوجد: (١)  $\int_٢^٤ \left[ \frac{1}{س} - \frac{1}{س^٢} \right] دس$  { ٢ }

(٢)  $\int_{-٠.٥}^{١.٥} [س^٢ + ٠.٤] دس$  { ١.٩ }

{ ارشاد: لمعرفة البداية نصفر الاقتران }

(٥٣) ما اشارة كل من التكاملين:

(١)  $q(س) = \int_١^٢ \frac{س^٢ + ٥}{س^٢ + ١} دس$  { موجب }

(٢)  $هـ(س) = \int_١^٢ \frac{س^٢ - ٥}{س^٢ + ١} دس$  { سالب }

{ ارشاد: اشارة التكامل نفس اشارة الاقتران حسب خاصية المقارنة }

(٥٤) إذا كان  $\int_١^١ (س - أ) دس = ١٨$  ، فما قيمة أ ؟ {  $-٣, ٣$  }

(٥٥) ما قيمة (١)  $\int_١^٢ (س^٢ - ٢س + ١) دس$  {  $\frac{1}{٧}$  }

(٢)  $\int_{-٢}^٢ |س^٢ - ٣س + ٣| دس$  { ٢٨ }



(٥٦) أجز التكاملات التالية:

$$(١) \int \frac{جا^٢ س + ١}{جا^٢ س} د س \quad \{ - جتا س - ظتا س + ج \}$$

{ ارشاد: تجزئة الكسر }

$$(٢) \int \frac{١}{٢ - ٢ جتا س} د س \quad \{ - \frac{١}{٢} ظتا س - \frac{١}{٢} قتا س + ج \}$$

{ ارشاد: انطق المقام }

$$(٥٧) \text{ أوجد } \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} جتا \theta د س , \quad \{ \theta \text{ ثابت} \} \quad \{ \pi جتا \theta \}$$

$$(٥٨) \text{ حل المعادلة التفاضلية } \frac{د ص}{د س} = \frac{جا^٢ س}{جتا^٣ ص}$$

$$\{ \frac{١}{٣} جا^٣ س = \frac{١}{٢} جتا^٢ س + ج \}$$

(٥٩) أوجد قاعدة الاقتران الذي يمر منحناه في النقطة  $(-٢, ٩)$  وميل المماس عند أي نقطة عليه هو  $(٣ س - ٢) (٢ + س)$

$$\{ ق(س) = س^٢ + ٢ س^٢ - ٤ س + ١ \}$$

(٦٠) تحرك جسيم في خط مستقيم ابتداء من نقطة الأصل بتسارع حسب العلاقة  $ت = ٦ ن (١ - ن^٢)$  ،

احسب السرعة والمسافة عند أي نقطة، اذا كانت السرعة تساوي ١ م/ث بعد ثانية واحدة.

$$\{ ع = ٣ ن^٢ - \frac{٦}{٤} ن - \frac{١}{٢} , ف = \frac{٢}{١٠} ن^٢ - \frac{١}{٢} ن \}$$

$$(٦١) \text{ أوجد } \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} جا س جتا س د س \quad \{ صفر \}$$



(٦٢) إذا كان  $ق(١) = ١$  ،  $ق(٤) = ٩$  ،  $\int_1^4 ق(س) دس = ٧$

أوجد  $\int_1^{16} \frac{ق(\sqrt{س})}{\sqrt{س}} دس$  { تعويض:  $ص = \sqrt{س}$  ،  $\{14\}$  }

(٦٣) أوجد  $\int \frac{١}{س} جتا \frac{١}{س} دس$  { - جا  $\frac{١}{س} + ج$  }

(٦٤) أوجد  $\int_0^\pi س^2 جتا س دس$  {  $-\frac{2\pi}{4}$  ، بالأجزاء }

(٦٥) إذا كان  $هـ(١) = ١$  ،  $هـ(٢) = ٥$  ،  $هـ(٣) = -٣$

أوجد  $\int_1^2 س هـ'(س) دس$  {  $\{-11\}$  ، بالأجزاء }

(٦٦) أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقترانين  $ق(س) = \sqrt{س}$  ،

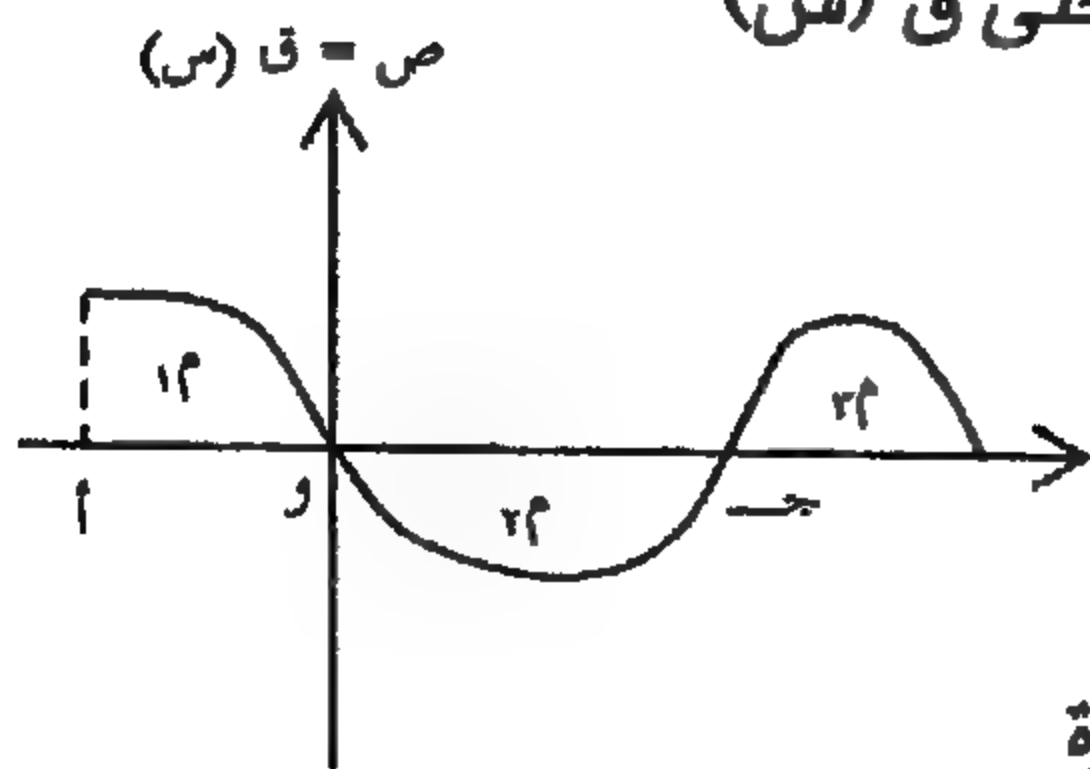
$هـ(س) = -\sqrt{س}$  ، والمستقيم  $س = ٤$  {  $\frac{32}{3}$  }

(٦٧) أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران  $ق(س) = جتا س$

ومحور السينات والمستقيمين  $س = ٠$  ،  $س = \pi$  {  $2$  }

{ ارشاد: مساحتين }

(٦٨) اعتماداً على الشكل الذي يمثل منحنى  $ق(س)$



وكانت  $م_١ = ٦$  ،  $م_٣ = ٨$  ،  $م_٣ = ١٠$

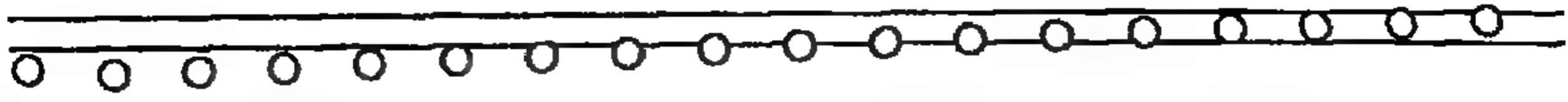
أوجد: (١)  $\int_1^4 ق(س) دس$  {  $8$  }

(٢) مساحة المنطقة المحصورة

بين منحنى  $ق(س)$  ومحور السينات في الفترة  $[أ ، ب]$

{  $24$  وحدة مساحة }





(٦٩) أوجد المساحة المحصورة بين منحنى العلاقة  $\sqrt{s} + \sqrt{ص} = ١$  والمحورين

$$\left\{ -\frac{1}{6} \right\}$$

(٧٠) أوجد المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران ق (س) =  $٤س^2 - ١٠٠س$  ومحور السينات.

$$\{ ١٢٥ \}$$

(٧١) أوجد المساحة المحصورة بين الاقترانين ق (س) =  $\sqrt{s}$  ، هـ (س) =  $\sqrt[3]{s}$

$$\left\{ -\frac{1}{12} \right\}$$

(٧٢) أوجد المساحة المحصورة بين الاقتران ق (س) =  $|س|$  ومحور السينات والمستقيمين س =  $-٢$  ، س =  $٥$

$$\left\{ \frac{29}{2} \right\}$$

(٧٣) أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنىي الاقترانين ق<sub>١</sub> (س) = س ، ق<sub>٢</sub> (س) =  $١ - س$  ومحور السينات

$$\left\{ -\frac{1}{4} \right\}$$

{ ارشاد: أكثر من منطقة }

$$\frac{\pi}{3}$$

(٧٤) أوجد قيمة  $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos x \, dx$

$$\{ ١ - \frac{1}{2} \}$$

(٧٥) أوجد  $\int_0^1 \frac{dx}{1-x^2}$

{ كسور جزئية }





$$(76) \text{ إذا كان } \int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx = \frac{\pi}{4} \text{ ، } \int_0^{\pi} \cos^2 x \, dx = \frac{\pi}{4} \text{ ، } \int_0^{\pi} \sin x \, dx = 2 \text{ ، } \int_0^{\pi} \cos x \, dx = 0$$

{ ارشاد: الخاصية الخطية }

$$(77) \text{ ما قيمة } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx \text{ ؟ } \{ \text{تعويض} \}$$

$$(78) \text{ احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى } y = \sin x \text{ والمحورين والمستقيم } y = 1$$

(79) أجز التكاملات التالية:

$$(1) \int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx \text{ ، } \int_0^{\pi} \cos^2 x \, dx \text{ ، } \int_0^{\pi} \sin x \, dx \text{ ، } \int_0^{\pi} \cos x \, dx$$

$$(2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx \text{ ، } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx \text{ ، } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx \text{ ، } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx$$

$$(80) \text{ إذا كان } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx = \frac{\pi}{4} \text{ فما قيمة } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx \text{ ؟ } \{ - \frac{\pi}{4} \}$$

(81) حل المعادلة التفاضلية التالية:

$$\frac{dy}{dx} = \sin x \text{ ، } y(0) = 0 \text{ ، } y(\pi) = 0$$

$$(82) \text{ أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين قوس } y = \sin x \text{ وخط } y = 1 \text{ والمستقيم } y = 0 \text{ في الفترة } [0, \pi]$$

$$\{ \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \}$$

$$(83) \text{ إذا كان } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx = \frac{\pi}{4} \text{ فما قيمة } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx \text{ ؟}$$

$$\{ \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8} \}$$



(٨٤) أجز التكاملات التالية:

$$(١) \int \frac{1}{s} \ln s \, ds \quad \left\{ s \ln s - s + \text{ج} \right\}$$

$$(٢) \int \frac{1}{s} \ln^2 s \, ds \quad \left\{ \frac{1}{3} \ln^3 s + \text{ج} \right\}$$

$$(٣) \int \frac{1}{s} \ln^3 s \, ds \quad \left\{ \frac{1}{4} \ln^4 s - \frac{1}{16} \ln^2 s + \text{ج} \right\}$$

$$(٨٥) \text{ ما قيمة } \int \frac{1}{s} \ln s \, ds$$

$$\left\{ -\frac{5}{2} \right\}$$

(٨٦) أجز التكاملات الآتية:

$$(١) \int \frac{s \ln s}{s^2} \, ds$$

{ ارشاد: أجزاء ثم تعويض

$$ق = s, د = \ln s = \text{ج} \ln s - \frac{1}{2} s^2 + \text{ج}$$

$$(٢) \int \frac{s^2 + s - 5}{s^2} \, ds$$

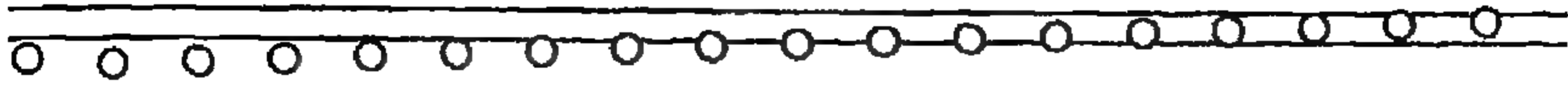
{ كسور جزئية بعد القسمة الطويلة

$$(٨٧) \text{ ما قيمة } \int \frac{1}{s} \ln s \, ds$$

{ ارشاد: عوض الحد الأعلى ككون إشارة س سالبة

$$(٨٨) \text{ ما قيمة } \int \frac{1}{s} \ln s \, ds$$

$$\{ 12 \}$$



(٨٩) أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق (س) =  $\frac{1}{4} س^2$

والمستقيمين ص = ١ ، ص = ٩

$$\left\{ ٦٩ \frac{1}{3} \right\}$$

{ ارشاد: عدة مناطق }

(٩٠) انطلق جسيم في خط مستقيم من نقطة أ ، فإذا كانت سرعته ع م/ث بعد

زمن مقداره ن ثانية تعطى بالقاعدة:

$$\left. \begin{array}{l} ٢ > ن \geq ٠ \\ ٨ \geq ن \geq ٢ \end{array} \right\} = ع$$

ما بعده عن النقطة أ بعد ٥ ثواني من بدء انطلاقه؟ { ٣٥ }

(٩١) اذا كان منحنى السعر - الطلب ع = ق (س) = ٥٠ - ٤ س

ومنحنى السعر - العرض ه = ق (س) = ٢٠ + ٢ س

أوجد سعر التوازن؟

$$\{ ٣٠ \}$$

(٩٢) اذا كان اقتران الايراد الحدي د (س) = ٣ س<sup>٢</sup> - ٢ س + ١ أوجد اقتران

الايراد الكلي.

$$\{ س^٢ - ٢ س + س \}$$

(٩٣) اذا كان  $\int_٢^٦ ٣ ق (س) د س = ١٨$  ، وكان  $\int_٢^٥ ق (س) د س = ٢$  فما قيمة

$$\int_٦^٥ ق (س) د س$$

$$\{ - ٤ \}$$





(٩٤) ما قيمة  $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$  بحيث أن المستقيم  $s = 1$  يقسم المساحة المحصورة بين المنحنى

$s = \sqrt{x}$  ، والمستقيم  $s = 2$  ومحور السينات الى قسمين متساويين.

$$\left\{ \sqrt{x} \right\}$$

$$\{ 1 \}$$

(٩٥) أوجد  $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$

(٩٦) حل المعادلة التفاضلية  $\frac{ds}{dx} = 3s^2$

$$\left\{ -\frac{1}{s} = \frac{2}{3}s^2 + C \right\}$$

(٩٧) أوجد  $\int \frac{\sqrt{x}}{x} dx$   $\{ -2 \sqrt{x} + C, \text{ تعويض} \}$

(٩٨) إذا كان  $\int_1^2 (2s + 1) ds = 12$  فما قيمة  $A$  ؟

$$\{ \text{بالقانون} \}$$

(٩٩) أوجد  $\int \frac{s^4 + s^2 + 1}{s} ds$

$$\{ 2\sqrt{s} + C, \text{ تعويض} \}$$

(١٠٠)  $\int \sqrt{s} ds$

$$\{ \text{صفر} \}$$

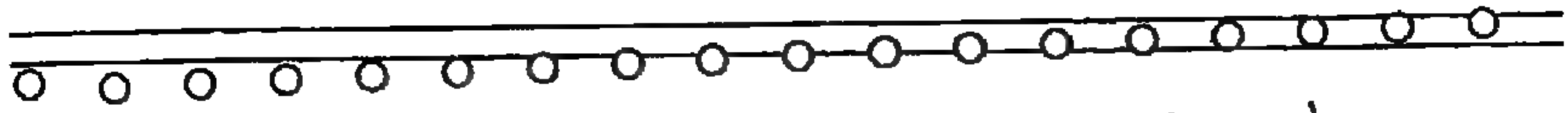
(١٠١) أوجد (١)  $\int_0^1 \sqrt{1 + s^2 + 2s} ds$

$$(2) \int_1^2 (1 + s)^2 ds$$

(١٠٢) ما مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران  $Q(s) = s - 2$  ومحور

السينات في الفترة  $[-1, 7]$  ؟

{ ارشاد: هناك أكثر من منطقة }



$$(103) \text{ أوجد } \int \frac{s^0 + 1}{s + 1} ds$$

{ ارشاد: قسمة طويلة أو تركيبيه }

$$(104) \text{ إذا كان } (1) \int (s) ds = s^2 + 1 \text{ أوجد } (2) \{ 12 \}$$

$$(2) \int (جس + 5) ds = 12 \text{ أوجد قيمة ج}$$

$$(3) \int (س) ds = 5s^2 + 4س + ج \text{ اكتب قاعدة هـ (س)}$$

$$\{ 10س + 4 \}$$

$$(105) \text{ أوجد } \int (س - 3جس) ds$$

$$\left\{ \frac{1}{2} (س - 3جس - 3جس + 3جس) + ج \right\}$$

{ ارشاد: تكامل متكرر بطريقة الأجزاء }

(106) تتحرك نقطة مادية في خط مستقيم بتسارع ثابت مقدار 12 م/ث<sup>2</sup> جد سرعتها بعد مرور 5 ثوانٍ، علماً بأن سرعتها الابتدائية ع (0) = 7 م/ث.

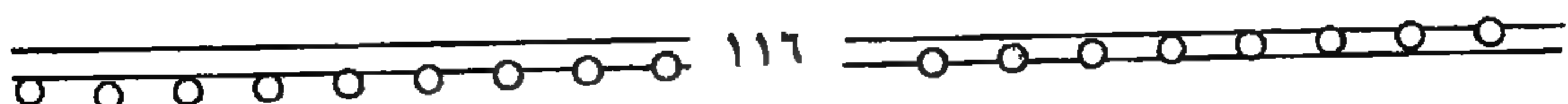
$$(107) \text{ إذا كان } \int (س) ds = 4س^2 - 6س^2 + 2 \text{ أوجد } (1)$$

{ ارشاد: فك التكامل بالاشتقاق }

$$(108) \text{ احسب قيمة } \int \sqrt{s} ds, \int \frac{1}{s} ds, \int (س) ds$$

$$(109) \text{ إذا كان } \int (-3) = 15, \int (-1) = 8 \text{ أوجد قيمة } \int (س) ds$$

$$\{ 22 \}$$





(١١٠) اذا كانت هـ (س) = ٦ س هي مشتقة الاقتران هـ (س) الأولى، المعرف على الفترة  $[-٢, ٣]$  أوجد قيمة هـ (٣) - هـ (-٢)

{ ١٥ }

(١١١) اذا كان:

$$(١) \int_{-٢}^1 ٢ س د س = \text{صفر} \quad \text{جد قيمة الثابت أ}$$

$$(٢) \int_{-٢}^3 ٩ س^٢ د س = ٢١ \quad \text{جد قيمة الثابت ب}$$

$$(٣) \int_1^3 (٢ س - ٤) د س = ١٥ \quad \text{جد قيمة الثابت ج}$$

(١١٢) أجز التكاملات التالية:

$$(١) \int \text{جتا}(س + ٥) د س \quad (٢) \int \frac{٣}{٥ + س^٣} د س$$

$$(٣) \int ٥ س^٥ د س \quad (٦) \int \frac{١٠ س - ٥}{س^٢(٥ + س - ٢ س^٢)} د س$$

(١١٣) أوجد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى ق (س) = ٣٦ - س<sup>٢</sup> ومحور السينات.

(١١٤) أوجد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ٦ - ٣ س والمستقيمين س = صفر ، س = ٤

(١١٥) اذا كان اقتران الايراد الحدي لبيع أجهزة التلفاز في احدى الشركات هو:

$$د(س) = ١٥٠ س - ١٨ س + ٥٠$$

جد الايراد الكلي الناتج عن بيع ٧ أجهزة تلفاز.





(١١٦) استثمر شخص ٨٠٠٠ دينار في بنك بحساب الفائدة المركبة ومعدلها ٨٪

سنوياً، جد الجملة بعد مرور ٢٥ سنة إذا كانت الفوائد تضاف الى الأصل

بشكل مستمر وخاضعة لقانون النمو؟

(١١٧) اذا علمت أن  $\int_1^2 \frac{1}{x} dx = 17$  ،  $\int_1^2 \frac{1}{x^2} dx = 28$

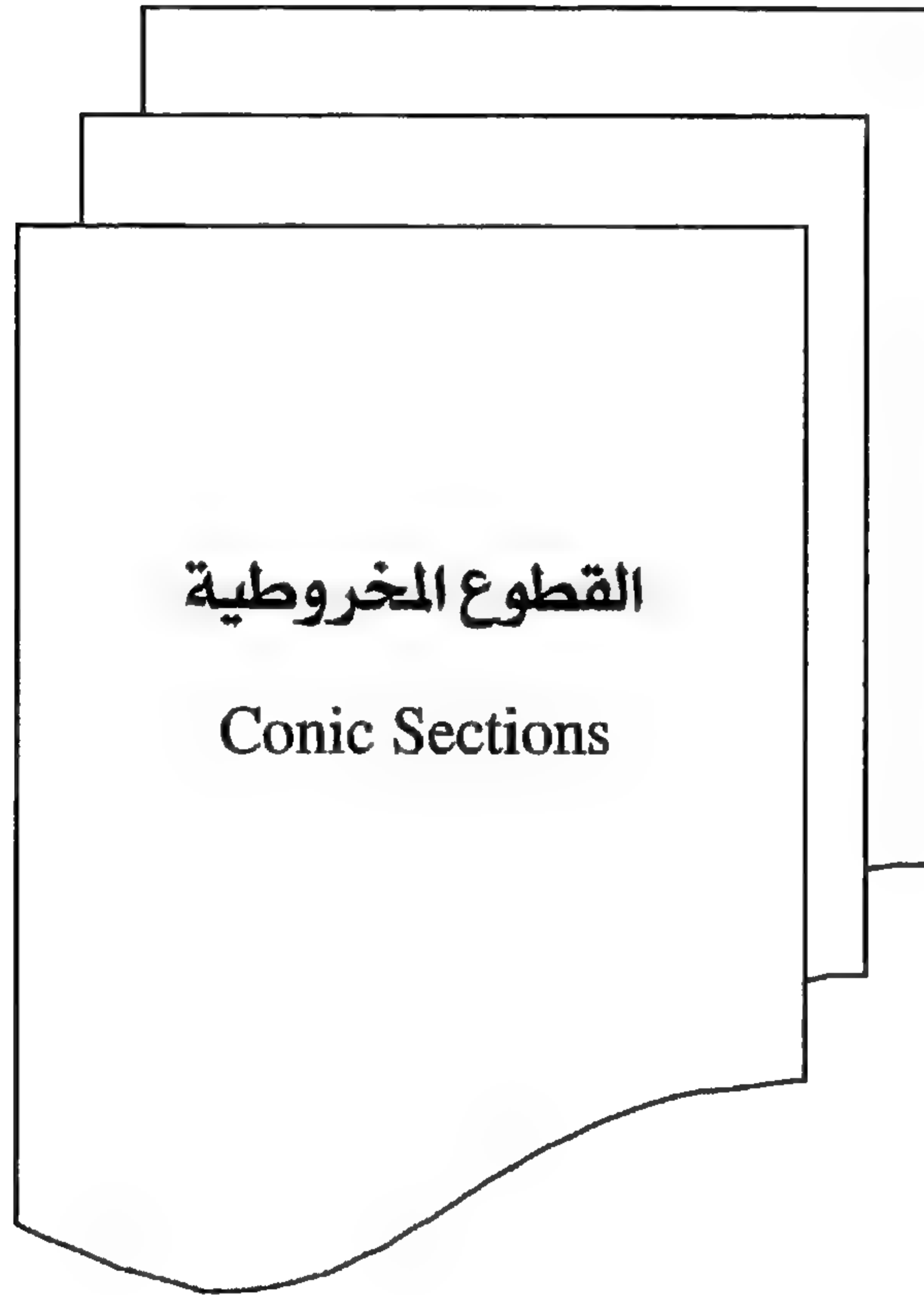
احسب قيمة  $\int_1^2 \frac{1}{x^3} dx$  (س) د س { ٨ }

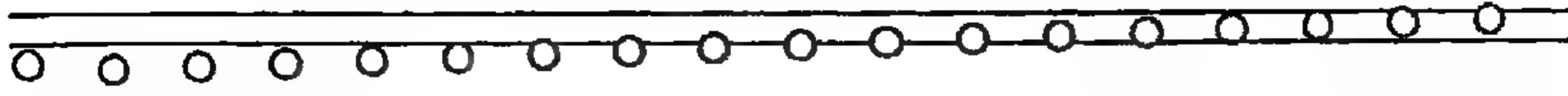
(١١٨) اذا كان اقتران السعر - الطلب لمنتج معين هو  $Q = 14 - 2S$

واقتران السعر - العرض لنفس المنتج هو  $Q = 2 + S$

احسب سعر التوازن، وفائض المنتج فقط.

(١١٩) أوجد  $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$  لو  $\int_1^2 \frac{1}{x^2} dx = 28$





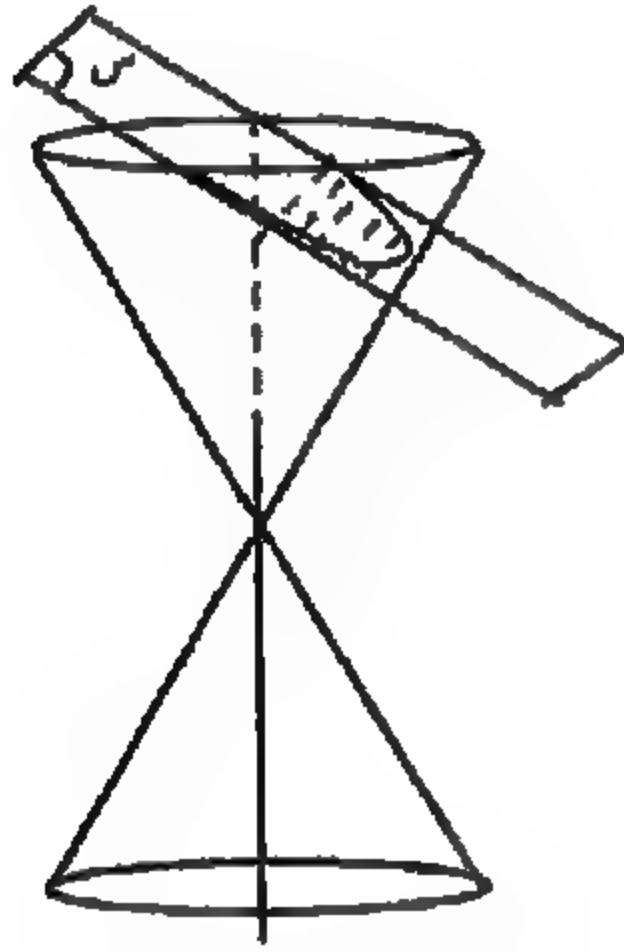
## (٢٣ - ١) القطع المخروطي والمحل الهندسي

تعتبر القطوع المخروطية من أهم مواضيع الهندسة التحليلية على الإطلاق، كونها من الوسائل العلمية لدراسة علم الفضاء، وعلى وجه الخصوص مسارات الكواكب والمذنبات وغيرها من الأجرام السماوية.

سنناقش القطوع المخروطية ومنحنياتها هندسياً وجبرياً هكذا:

يمكن الحصول على القطوع المخروطية هندسياً ( عملياً ) عند قطع مستوى مخروطاً مزدوجاً مكوناً من مخروطين قائمين ملتقيان بالرأس كما في الأشكال

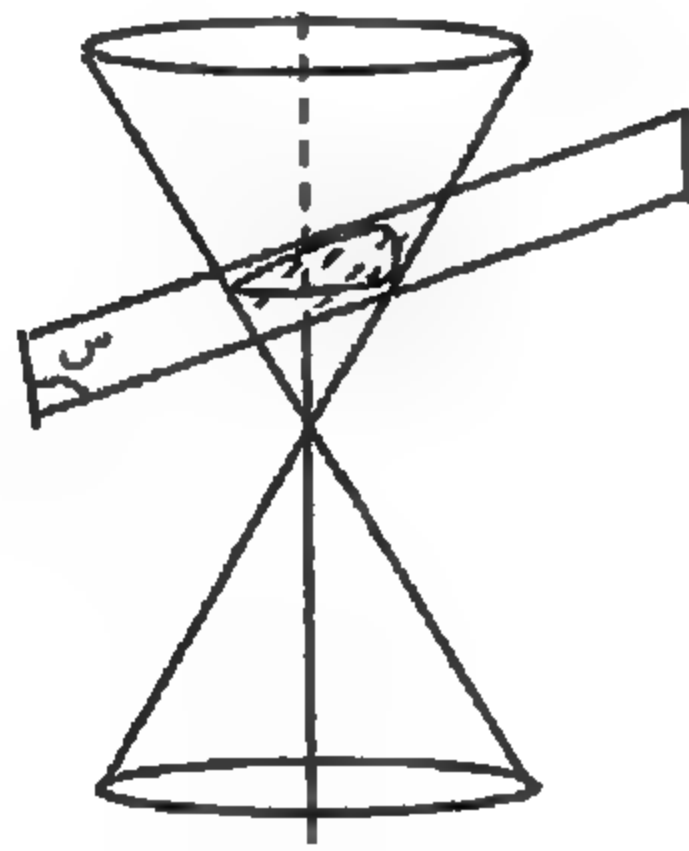
التالية:



محور

قطع مكافئ

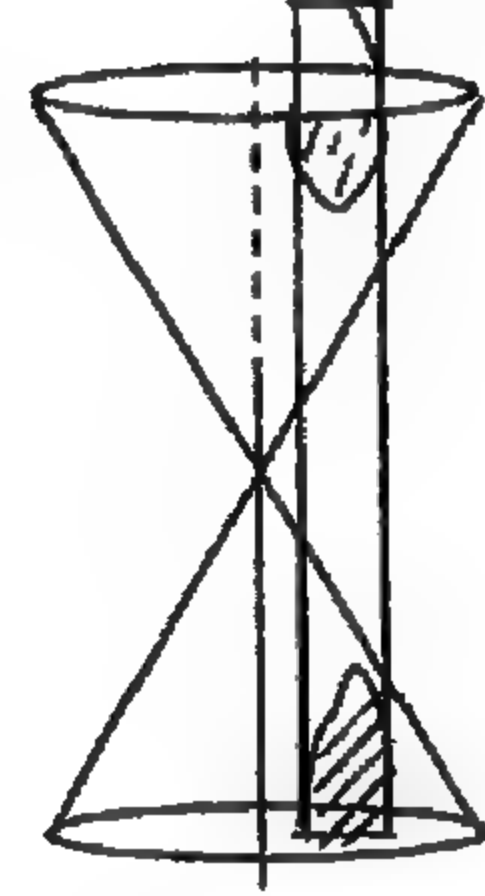
(١)



محور

قطع ناقص

(٢)



محور

قطع زائد

(٣)

واننا نلاحظ من الرسم:

(i) ان المستوى س مائل ويقطع فرعاً واحداً من المخروط المزدوج، هذا المقطع يسمى "القطع المكافئ".

(ii) المستوى س مائل ويقطع فرعاً واحداً من المخروط المزدوج هذا القطع يسمى "القطع الناقص".

(iii) المستوى س ليس مائل ويقطع فرعي المخروط ولا يحتوي الرأس هذان المقطعان معاً يسمى القطع الزائد.

## المقاطع المخروطية



ملحوظة:

وإذا قطع المستوى المخروطين معاً عند الرأس المشترك كان القطع نقطة  
وإذا قطع المستوى المخروطين معاً وكان منطبقاً على المحور كان القطع مستقيماً  
هذان المقطعان "النقطة والمستقيم" يسميان قطوع مخروطية منحلة لا نود  
مناقشتها في هذا المؤلف بالذات.

وأما جبرياً فإن منحنيات هذا القطوع تمثل نوعاً من العلاقات الرياضية بين  
المتغيرين س ، ص معادلاتها من الدرجة الثانية، وجميعها تنتمي الى المعادلة التالية:

$$أس^2 + ب س + ج س + د ص + هـ = صفر$$

حيث أ ، ب ، ج ، د ، هـ أعداد حقيقية

وان أ ، ب لا يساويان الصفر معاً في آن واحد.

ولعلاقة المحل الهندسي بمنحنيات القطوع المخروطية، سنذكر به مرة

أخرى:

## المحل الهندسي Geometric Locus:

هو مسار (منحنى) ترسمه نقطة متحركة في المستوى تحت شروط معينة.

وهذه الشروط هي التي تنتج ما يسمى بمعادلة المحل الهندسي، وهي علاقة  
جبرية بين الاحداثيين السيني والصادي للنقطة المتحركة ن (س ، ص) كما في  
المثال:

مثال:

ما المحل الهندسي للنقطة ن (س ، ص) المتحركة والتي تبعد بعداً ثابتاً

مقداره ٩ (٢ ، ١) م

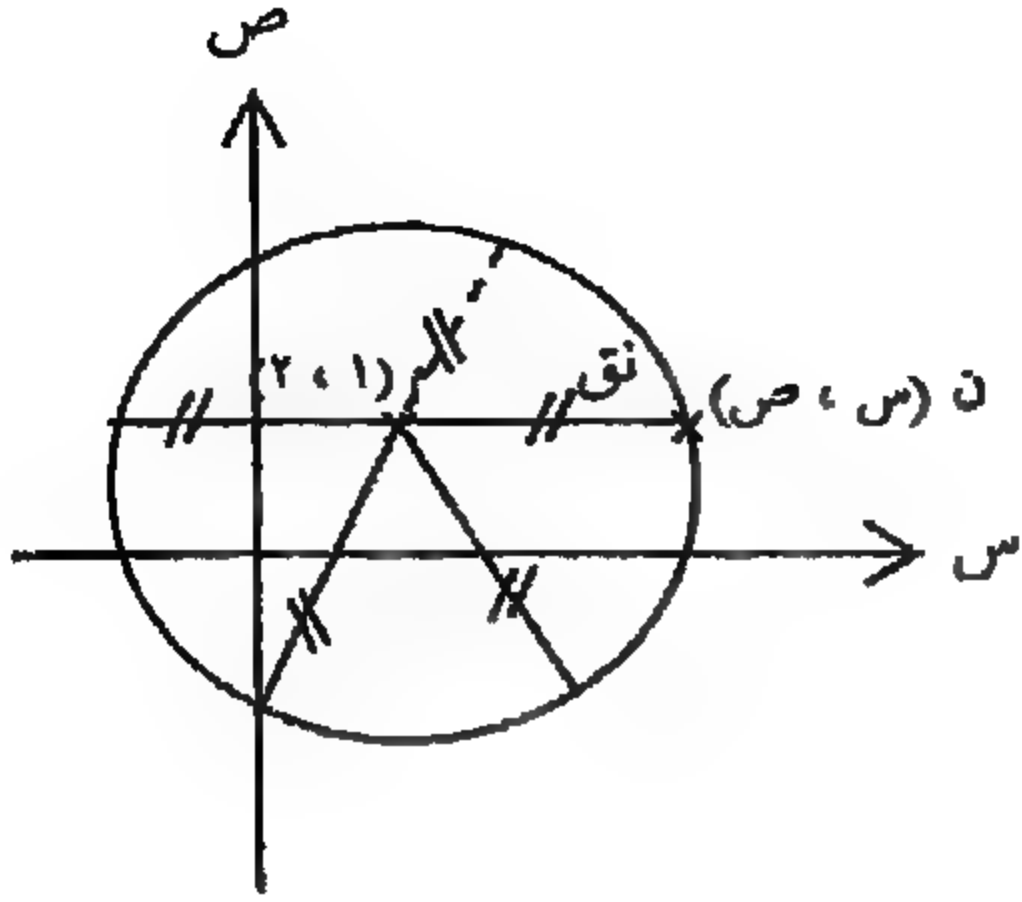




## المقطع المخروطية



الحل:



وصف المحل الهندسي، تتحرك النقطة  
ن (س ، ص) بحيث أن يكون بعدها  
عن م (١ ، ٢) دائماً = نق، ان مسار  
هذه النقطة المتحركة هو محيط دائرة  
كما في الشكل.

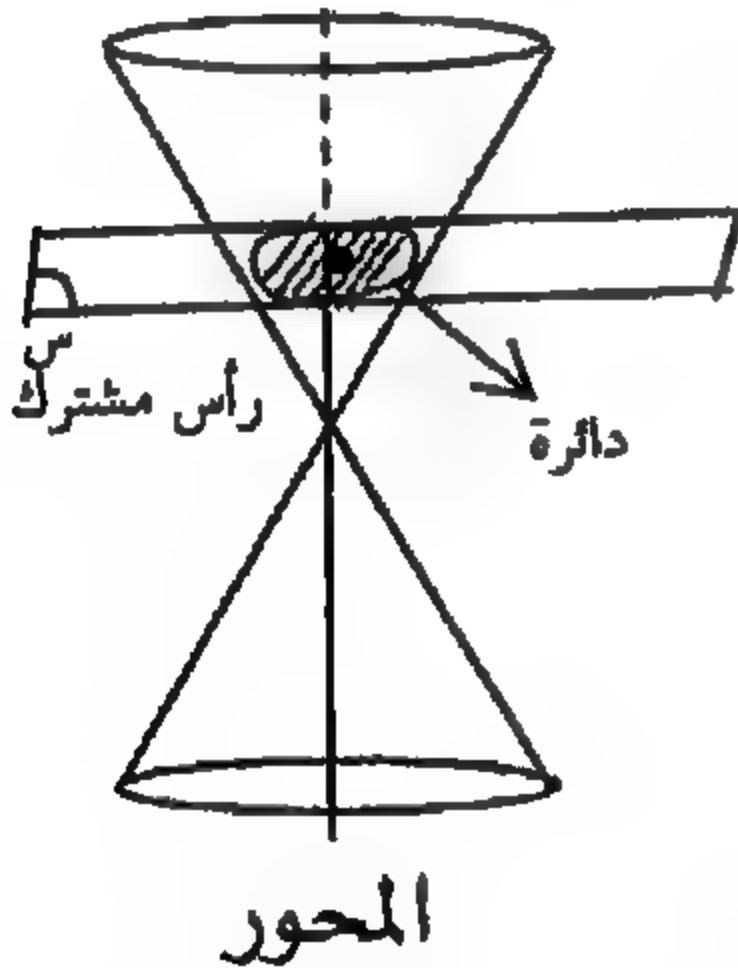
أما معادلة الحل الهندسي فينتج من استخدام قانون المسافة بين نقطتين هكذا:

$$ن م = نق = \sqrt{(س_١ - س_٢)^2 + (ص_١ - ص_٢)^2}$$

$$\therefore \sqrt{(س - ١)^2 + (ص - ٢)^2} = نق$$

انها الصورة القياسية لمعادلة الدائرة  $(س - ١)^2 + (ص - ٢)^2 = نق^2$

ولكن من المعلوم أن الدائرة تقطع مخروطي ينتج عملياً (هندسياً) من قطع



مستوى س لمخروطين ملتقيان بالرأس كما  
في الشكل عندما يكون المستوى عامودياً  
على المحور ولا يمر بالرأس المشترك.

وهكذا فإن منحنيات جميع القطوع المخروطية

(مكافئ، ناقص - الدائرة حالة خاصة - الزائد)

تنتج من نقطة متحركة بشروط معينة (محل هندسي) لذا فإنني للسهولة والتبسيط  
سأحصر مناقشة هذه القطوع في هذه البنود:

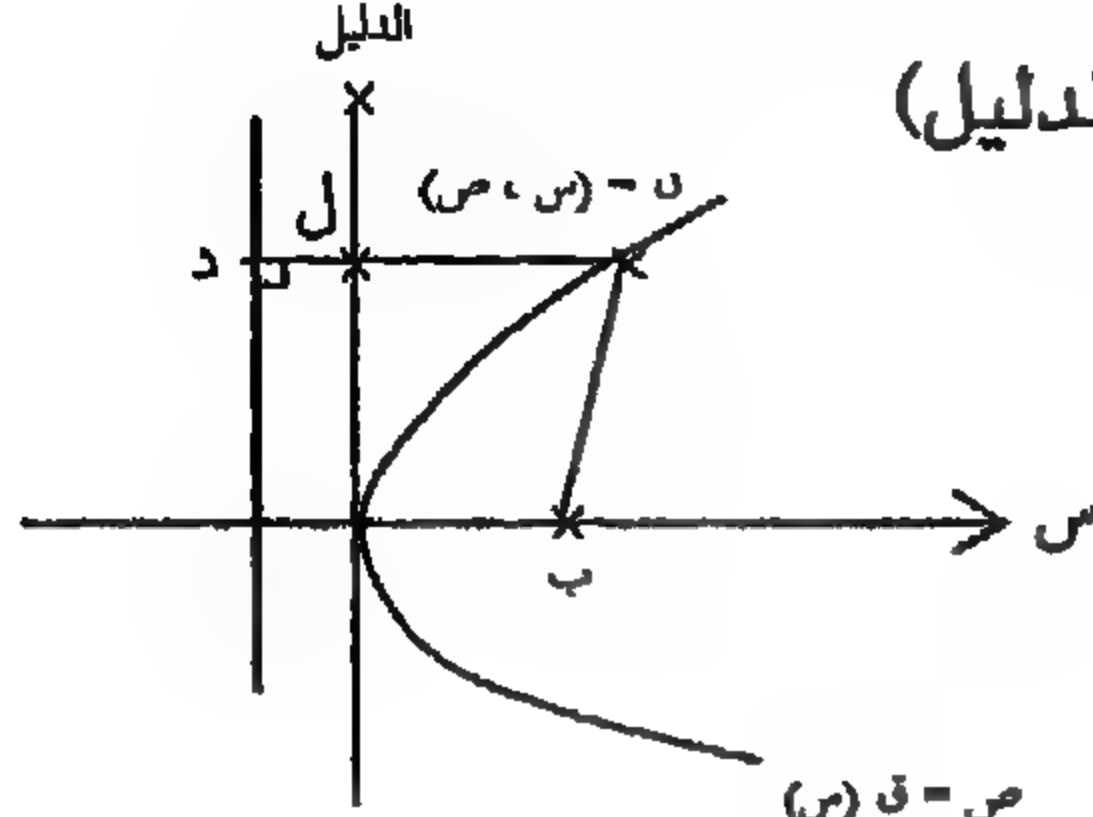
(٢٣ - ٢) القطع المكافئ Parabola:

القطع المكافئ مجموعة من النقط تقع جميعها في مستوى واحد على أبعاد  
متساوية من نقطة ثابتة ب تسمى البؤرة Focus ومن خط مستقيم معين ل يسمى  
الدليل Directrix الواقعين في المستوى نفسه.



## المقطع المخروطية

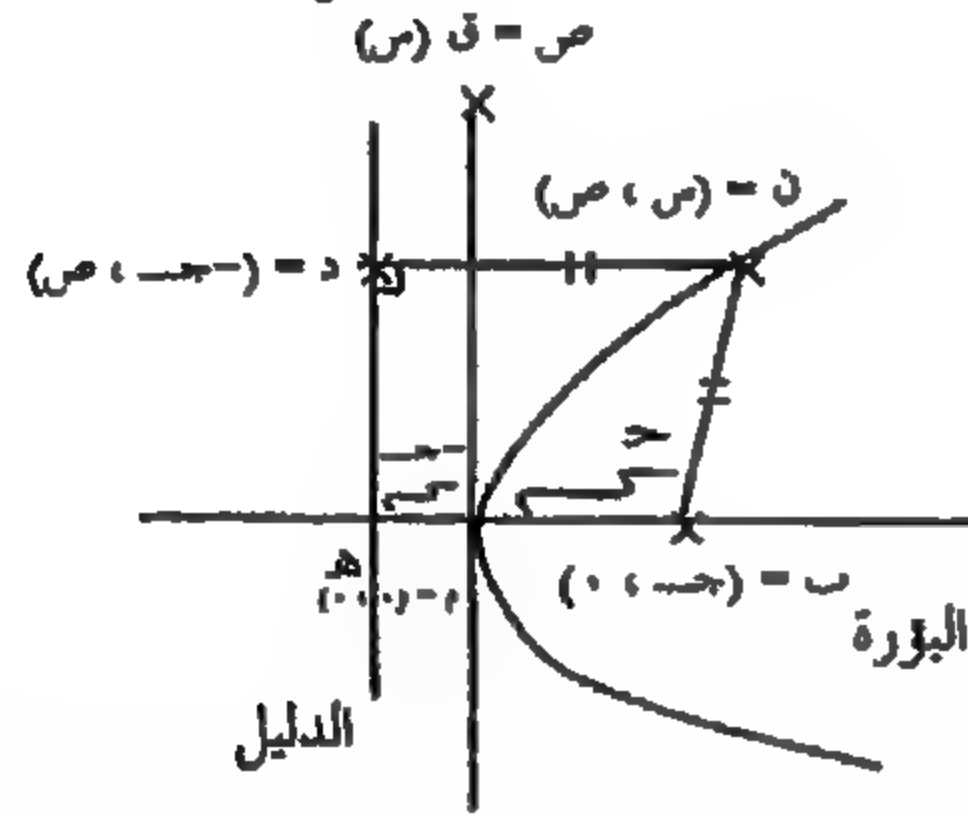
أما بلغة المحل الهندسي، فالقطع المكافئ هو مسار (منحني) لنقطة متحركة مثل ن (س، ص) والتي يكون بعدها أثناء حركتها عن نقطة ثابتة مثل ب (البؤرة) يساوي دائماً بعدها عن مستقيم معلوم مثل ل (الدليل) حيث  $ن ب = ن د$



الشرط الأساسي تحركة النقطة

ن (س، ص) كما هو واضح في الشكل

والشكل المجاور يبين مكوناته وهي:



• الرأس م (0، 0) Vertex

• الدليل "ل" ومعادلته  $س = -ج$

• البؤرة ب (ج، 0)

• المحور: مستقيم مار بالبؤرة والرأس معادلته  $ص = 0$  (هنا محور السينات)

كما هو واضح من الشكل، والقطع المكافئ متماثل حول المستقيم المار

بالبؤرة ب والعامودي على الدليل ل لذا يسمى محور التماثل، واختصار محور

القطع المكافئ، وتسمى النقطة الواقعة في منتصف المسافة بين البؤرة والدليل

رأس القطع المكافئ م (0، 0) هنا بالشكل.

لذا فإن  $ب م = م ه = ج$  حيث ج دائماً موجبة.

ج هي البعد بين البؤرة والرأس = البعد بين الرأس والدليل

وتسمى النسبة بين ب ن : ن د بالاختلاف المركزي Eccentricity

وبما أن  $ب ن = ن د$  بالفرض من التعريف

فإن الاختلاف المركزي للقطع المكافئ  $= \frac{ب ن}{ن د} = 1$  دائماً

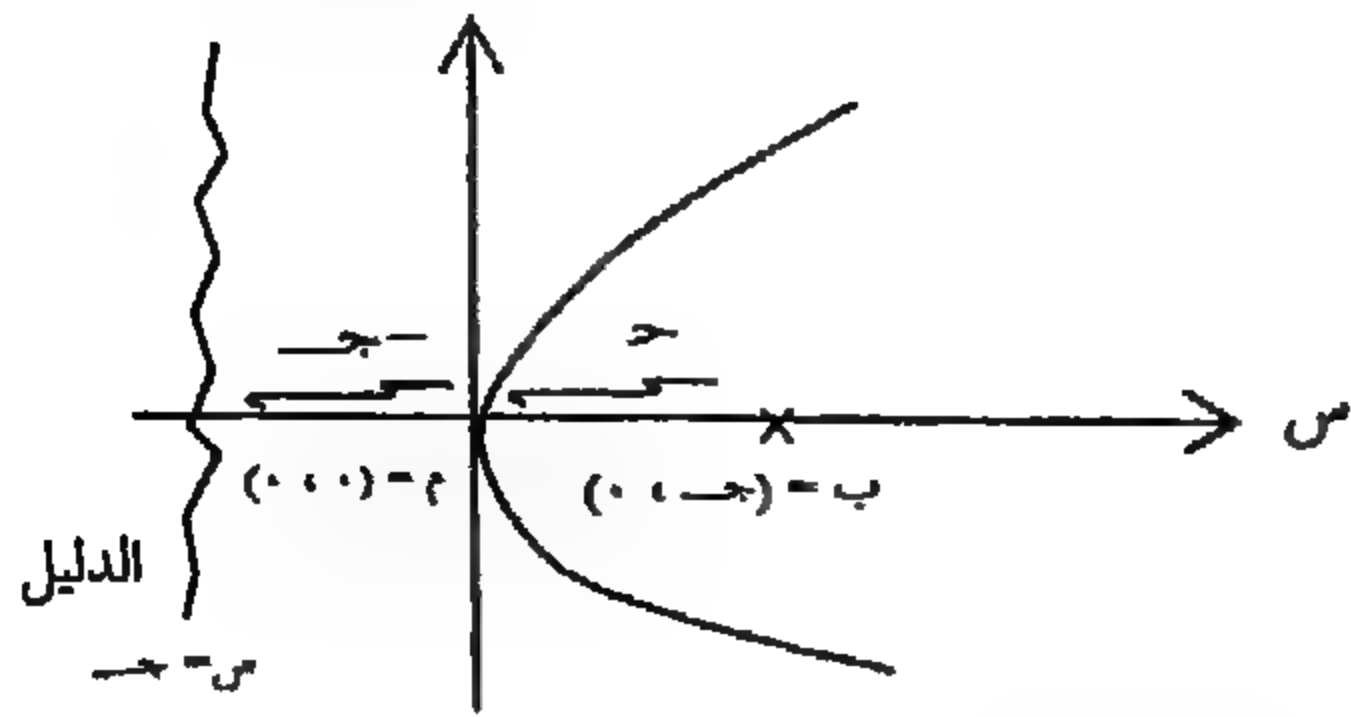
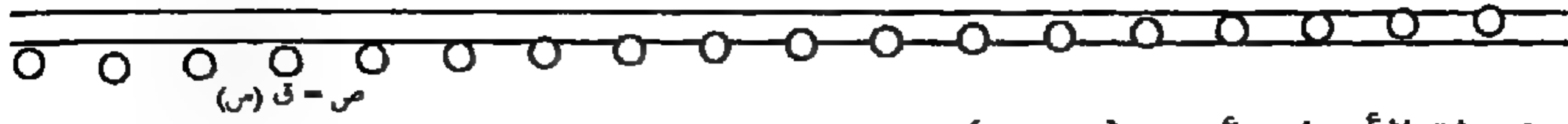
ويرمز له بالرمز ه:

أي أن  $ه = 1$  ومن هنا نسمي القطع المكافئ بهذا الاسم كون اختلافه المركزي

يكافئ الواحد الصحيح.

سندون الآن الصور القياسية Standard Position لمعادلة القطع المكافئ الذي

## المقاطع المخروطية

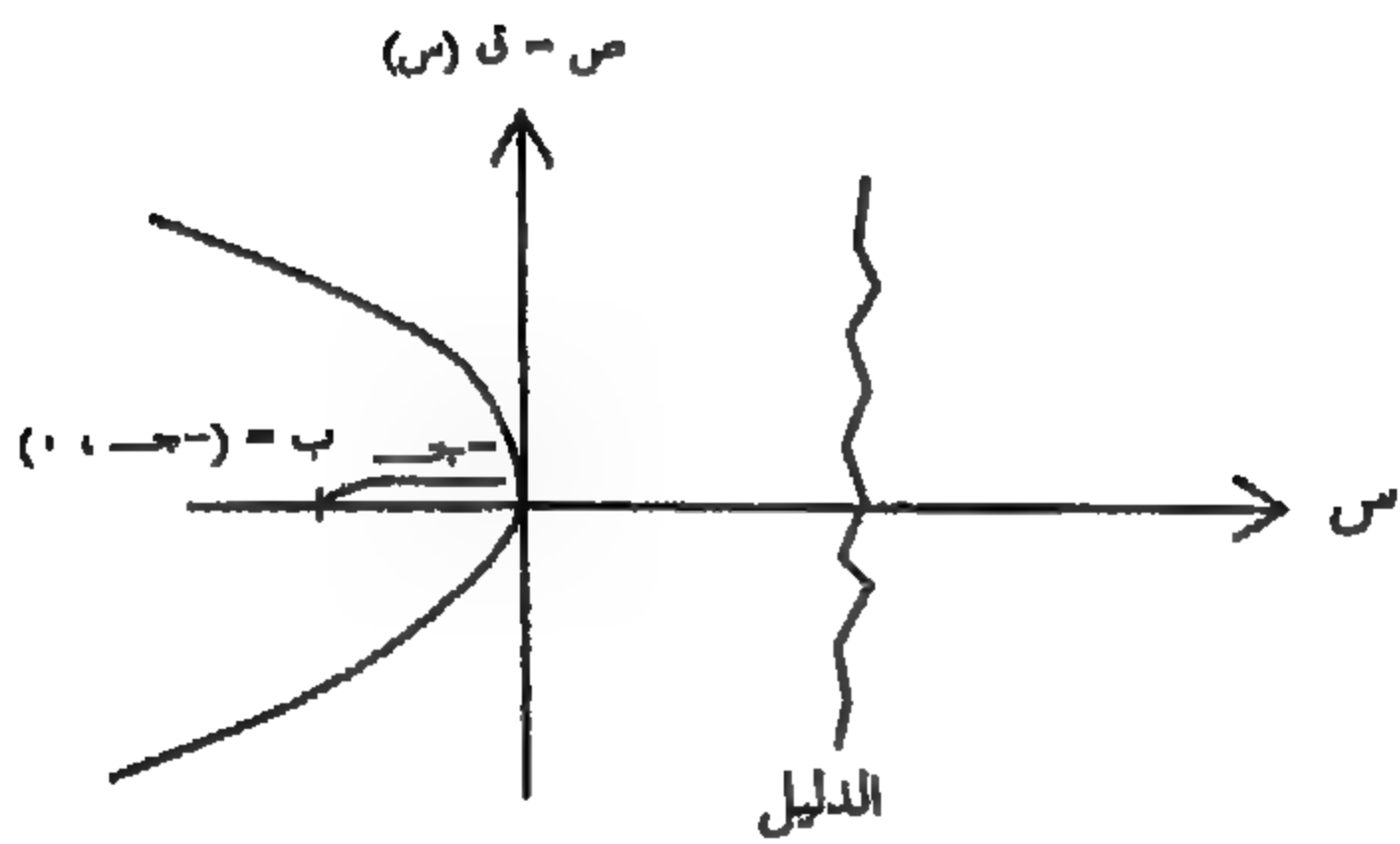


رأسه نقطة الأصل، أي م (٠ ، ٠)  
ومحوره ينطبق على محور السينات  
كما يلي:

$$\text{ص}^2 = \text{س} \text{ ج} \quad (١) \quad \dots\dots\dots$$

والتفسير: الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل م (٠ ، ٠)  
ومفتوح لليمين، حيث النوع عكس التربيع.

$$\text{ص}^2 = - \text{س} \text{ ج} \quad (٢) \quad \dots\dots\dots$$

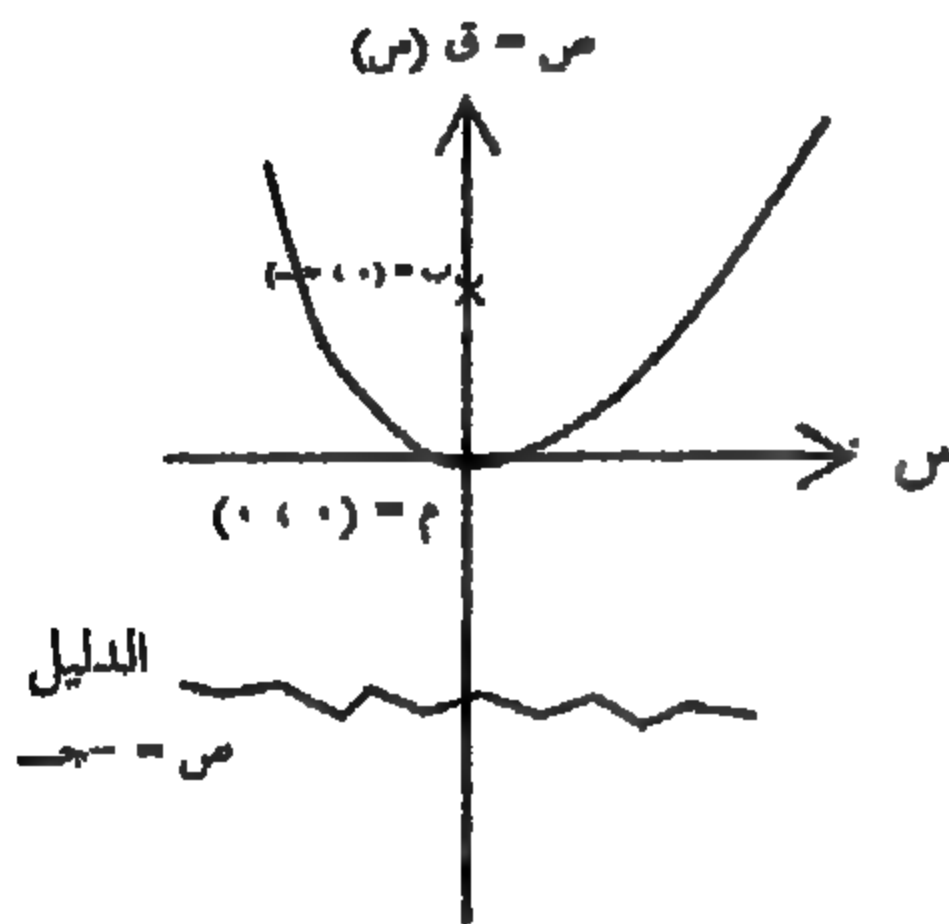


والتفسير: الصورة القياسية لمعادلة  
القطع المكافئ الذي رأسه نقطة  
الأصل م (٠ ، ٠) ومفتوح لليسار  
حيث النوع عكس التربيع س = ج

وفي الحالتين يمكن أن يسمى القطع المكافئ السيني هكذا:

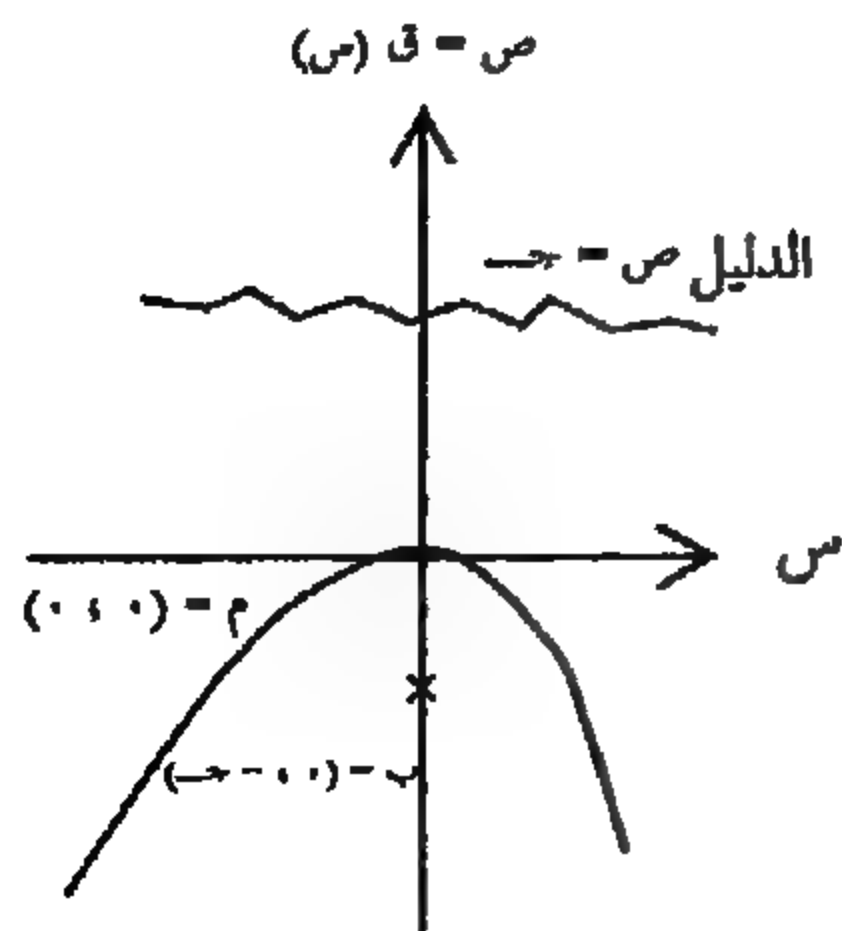
$$\text{ص}^2 = \pm \text{س} \text{ ج} \quad (١) \quad \dots\dots\dots \text{معاً.}$$

$$\text{س}^2 = \text{س} \text{ ج} \quad (٣) \quad \dots\dots\dots$$



والتفسير: الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ  
الذي رأسه نقطة الأصل م (٠ ، ٠) ومفتوح للأعلى  
النوع عكس التربيع.

$$\text{س}^2 = - \text{س} \text{ ج} \quad (٤) \quad \dots\dots\dots$$



والتفسير: الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ  
الذي رأسه نقطة الأصل م (٠ ، ٠) ومفتوح للأسفل  
النوع عكس التربيع، وفي الحالتين يمكن أن  
يسمى القطع المكافئ الصادي هكذا:

$$\text{س}^2 = \pm \text{س} \text{ ج}$$

## المقطع المخروطية



والأمثلة ستتكرر في اتجاهين متعاكسين:

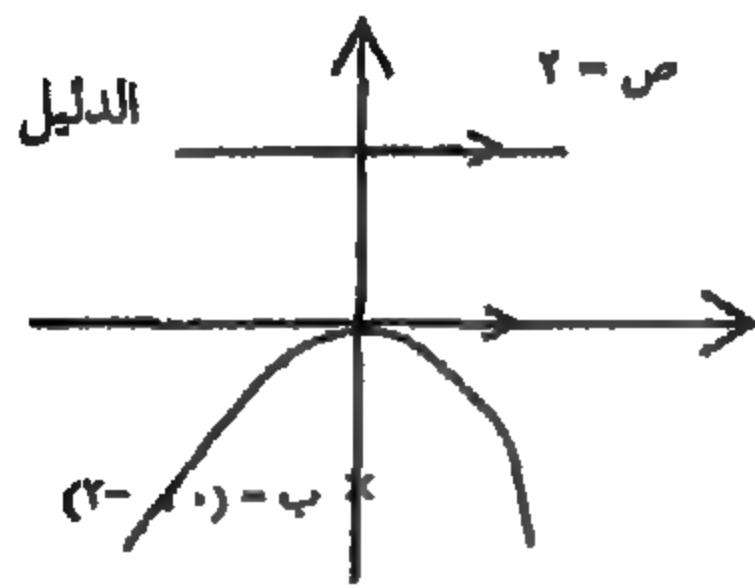
الأول: تُعطى معادلة القطع المكافئ لإيجاد مكوناته.

الثاني: تعطى بعض مكوناته لإيجاد معادلته.

والرسم للتوضيح في الحالتين:

مثال:

اكتب معادلة القطع المكافئ الذي رأسه م (٠ ، ٠) ومعادلة دليله  $٢ = ص$  ثم ارسم منحناه.



بما أن معادلة دليله  $٢ = ص$  فهو

صادي مفتوح للأسفل كما في

الرسم، لأن موقع البؤرة عكس

اتجاه الدليل كما في الشكل.

معادلته القياسية  $٢ = -٤ ج ص$

لكن  $٢ = ج$  لأن بعد البؤرة عن الرأس = بعد الرأس عن الدليل = ج

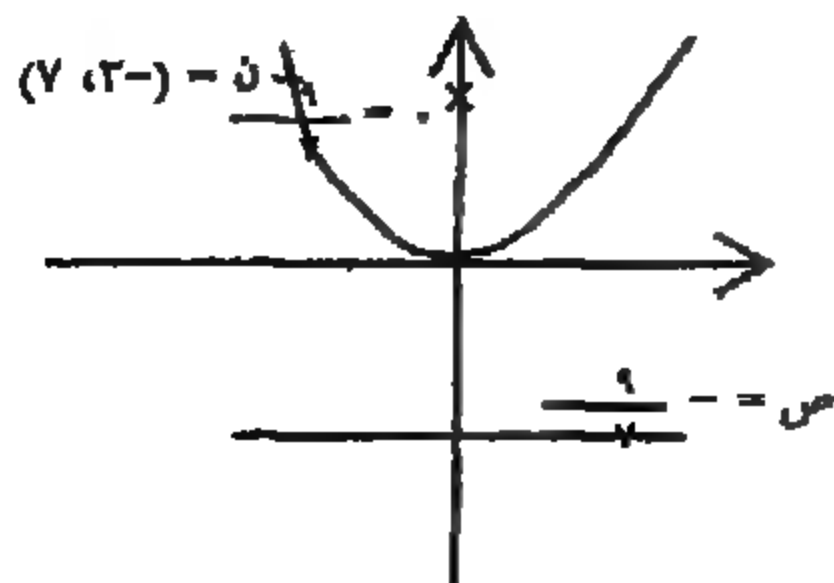
∴  $٢ = -٤ ج ص$  (٢ ص)  $٨ = -٤ ج ص$

المعادلة:  $٨ = -٤ ج ص$

ومحوره هو محور الصادات، معادلته  $ص = ٠$

مثال:

جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه م (٠ ، ٠) وفتحته للأعلى ويمر بالنقطة ن (٢ ، ٧) وجد بقية مكوناته.



حسب المعطيات فهو صادي مفتوح للأعلى

ومعادلته  $٢ = ٤ ج ص$  كما في الشكل

وبما أنه يمر بالنقطة فهي تخففه

### المقاطع المخروطية



$$(-3)^2 = 4 \Rightarrow (7) \leftarrow 9 = 28 \leftarrow ج \leftarrow ج = \frac{9}{28}$$

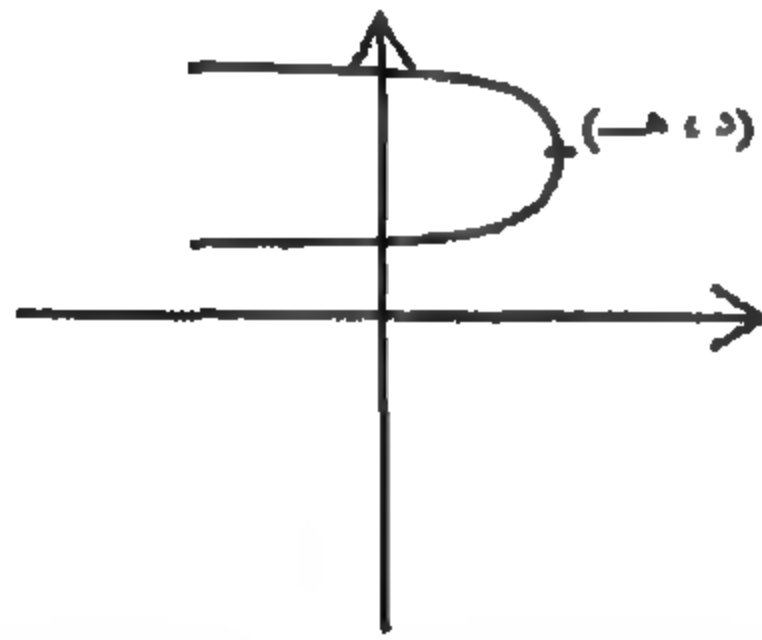
$$\therefore \text{المعادلة: } س^2 = \left( \frac{9}{\cancel{28}} \right) \left( \frac{1}{7} \right) \leftarrow ص \leftarrow س^2 = \frac{9}{7} \leftarrow ص$$

$$\text{فمعادلة الدليل: } ص = - \frac{9}{7}$$

ومحوره هو محور الصادات، ومعادلته  $س = 0$

والآن سنتعرف الصور القياسية لمعادلة القطع المكافئ الذي محوره يوازي أحد المحورين الاحداثيين أو ينطبق على أحدهما، ورأسه النقطة (د، هـ) بواسطة الانسحاب (تحويل هندسي) لليمين أو اليسار أو الأعلى أو الأسفل كما في الأشكال التالية:

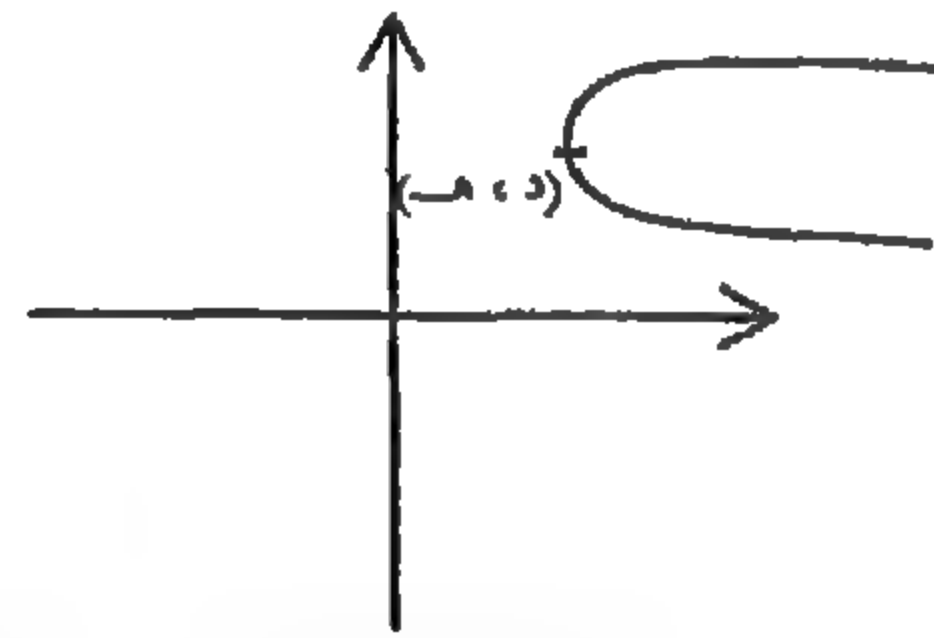
سيني مفتوح لليسار:



المعادلة: (النوع عكس التربيع)

$$(ص - هـ)^2 = - ٤ ج (س - هـ)$$

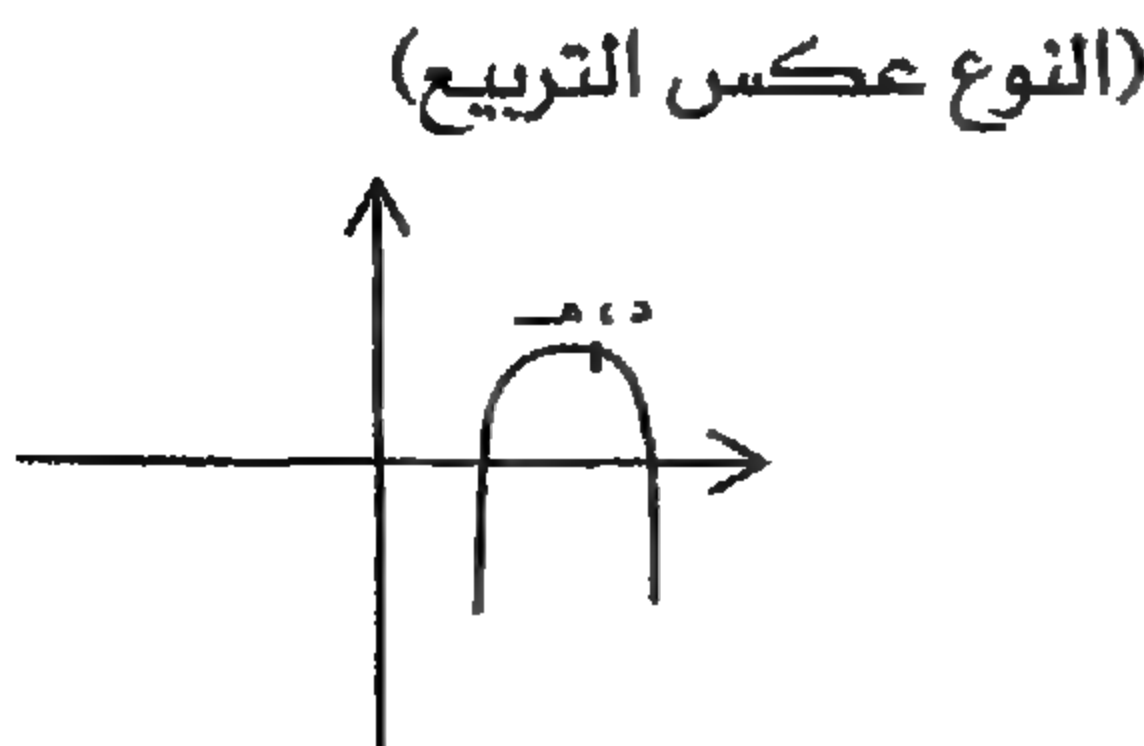
سيني مفتوح لليمين:



المعادلة: (النوع عكس التربيع)

$$(ص - هـ)^2 = ٤ ج (س - د)$$

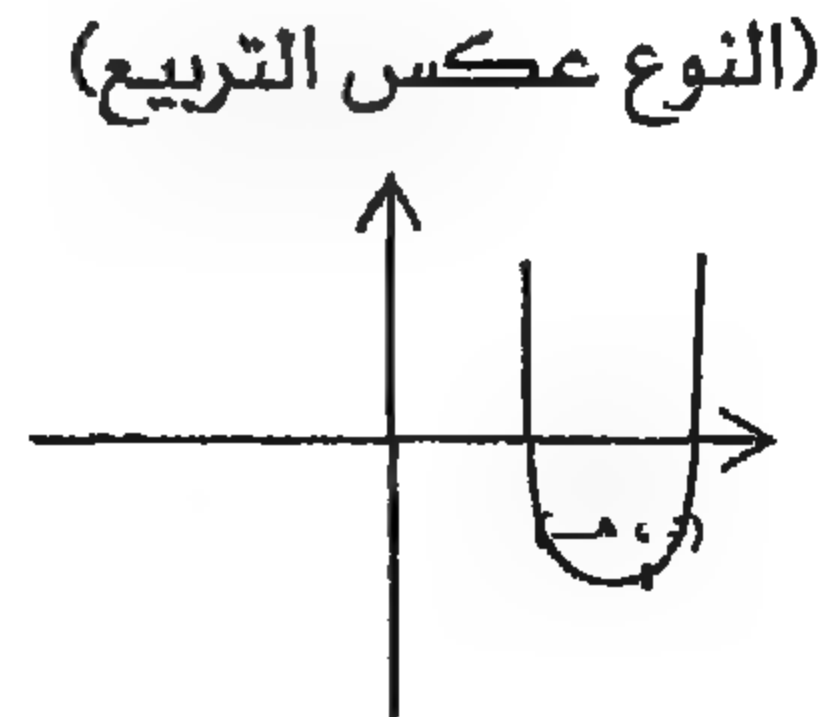
صادي مفتوح للأسفل:



(النوع عكس التربيع)

$$(س - د)^2 = - ٤ ج (ص - هـ)$$

صادي مفتوح للأعلى:



(النوع عكس التربيع)

$$(س - د)^2 = ٤ ج (ص - هـ)$$

## المقاطع المخروطية



ولمناقشة الأمثلة على القطع المكافئ، نستعين بالرسم ونجد أحداثيات الرأس أولاً، ثم اتجاه الفتحة ثانياً لتساعدنا في الحل ثم نكمل بالتسلسل ونركز على إيجاد ج = البعد بين الرأس والدليل = البعد بين البؤرة والرأس.

وحسب المخطط التالي:

أحداثيات الرأس ← اتجاه الفتحة والنوع ← قيمة ج ← بقية الحل:

مثال:

عيّن مكونات القطع المكافئ الذي معادلته  $(ص + ١)^2 = ٤(س - ٢)$  ثم ارسم منحناه.

"هنا الرسم مع الحل سوياً"

من معادلته فهو سيني مفتوح لليمين، ولإيجاد رأسه:

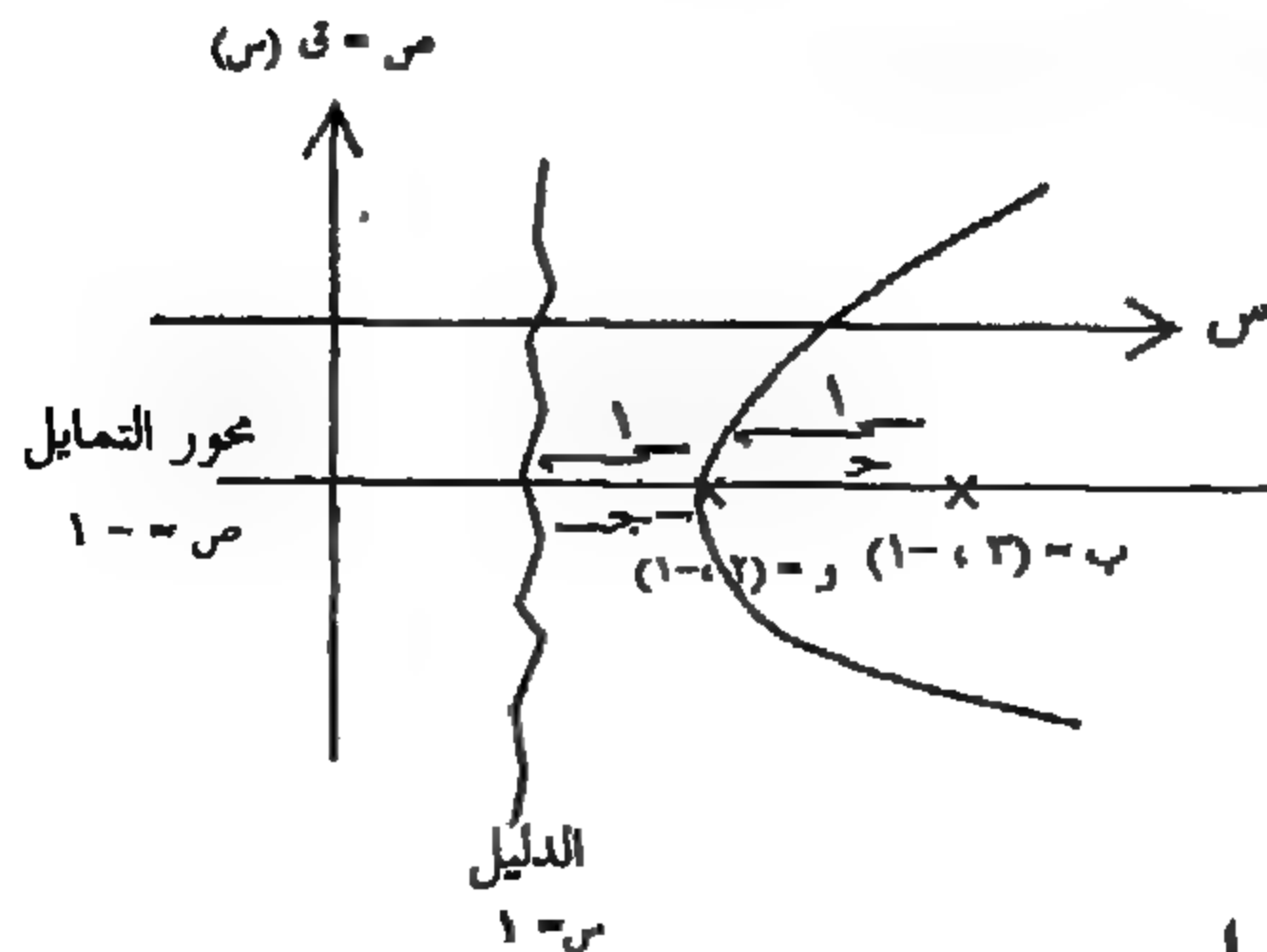
$$(ص + ١)^2 = ٤(س - ٢) \text{ نطابقه مع المعادلة القياسية}$$

$$(ص - هـ)^2 = ٤(س - د)$$

ومنهاد = ٢ ، هـ = -١ ، الرأس م (٢ ، -١) ← (١)

$$٤ = ج ← ٤ = ج = ١$$

وبقية المكونات نجدها من الرسم كما في الشكل



الرأس و (٢ ، -١)

البؤرة ب (٣ ، -١)

معادلة الدليل س = ١

معادلة محور التماثل ج = -١

الاختلاف المركزي هـ = ١ دائماً بلا حل.



### المقطوع المخروطية



بالإضافة الى أن للقطع المكافئ صور قياسية للمعادلة، فإن له صور عامة أيضاً.

× المعادلة العامة للقطع المكافئ الذي محوره يوازي محور الصادات أو ينطبق عليه في بعض الحالات:

$$ص = أ س^2 + ب س + ج$$

ويسمى القطع الصادي (النوع عكس التربيع) فهو مفتوح للأعلى أو للأسفل حسب إشارة أ

يكون مفتوحاً للأسفل اذا كانت إشارة أ سالبة أي  $أ < 0$  صفر

ويكون مفتوحاً للأعلى اذا كانت إشارة أ موجبة أي  $أ > 0$  صفر

ومعادلة القطع المكافئ الذي محوره يوازي محور السينات أو ينطبق عليه  $ص = أ س^2 + ب س + ج$  ويسمى القطع السيني ويكون مفتوحاً لليمين عندما  $أ < 0$  صفر أي إشارة أ موجبة. ومفتوح لليسار عندما  $أ > 0$  صفر أي إشارة أ سالبة. علماً بأن  $أ \neq 0$  صفر بأي حال من الأحوال.

وتحول الصورة العامة لمعادلة القطع المكافئ الى الصورة القياسية لإيجاد مكوناته بواسطة اكمال المربع كما يلي:

مثال:

عَيّن مكونات القطع المكافئ الذي معادلته العامة  $ص = ٢ س^2 + ٨ س + ٢٢$  وارسم منحناه.

نحوّل المعادلة الى الصورة القياسية بواسطة اكمال المربع هكذا:

$$ص = ٢ س^2 + ٨ س + ٢٢$$





### المقطع المخروطية



وبإضافة مربع نصف معامل س الى الطرفين:

$$س^2 + ٨س + ٢٢ = ٢(٤) + ٢٢ - ص$$

$$ومنها س^2 + ٨س + ٢٢ = ٢(٤) + ٢٢ - ص = ١٦ + ٢٢ - ص = ٣٨ - ص$$

$$أي أن (س + ٤)^2 = ٢(٤ + س) - ٣$$

وهذه الصورة القياسية لقطع مكافئ صادي مفتوح للأعلى

$$(س + د)^2 = ٤(٤ - ص)$$

$$ومنها: د = -٤ ، هـ = ٣$$

فاحداثيات الرأس و (-٤ ، ٣)

$$٤ = ٢ - ج \leftarrow ج = \frac{١}{٢}$$

$$البؤرة ب (-٤ ، \frac{٧}{٢})$$

$$معادلة محور التماثل: س = -٤$$

$$معادلة الدليل: ص = \frac{٥}{٢}$$

ملحوظتان جديرتان بالاهتمام:

في هذا السياق هناك ارتباط بين المقطع المخروطية والاشتقاق كما يلي:

الملحوظة الأولى: وهي شقان:

الشق (i): يمكن إيجاد احداثيات رأس القطع المكافئ الصادي  $ص = أ س^2 + ب س + ج$  فقط سواء أكان مفتوحاً للأعلى أو الأسفل بواسطة (التفاضل) أو الاشتقاق. إذ أن الرأس يُجدد قيمة قصوى عظمى كانت أم صغرى، لأن المماس عندها يوازي محور السينات حيث أنها نقطة حرجة كما في الشكل.

## المقطع المخروطية

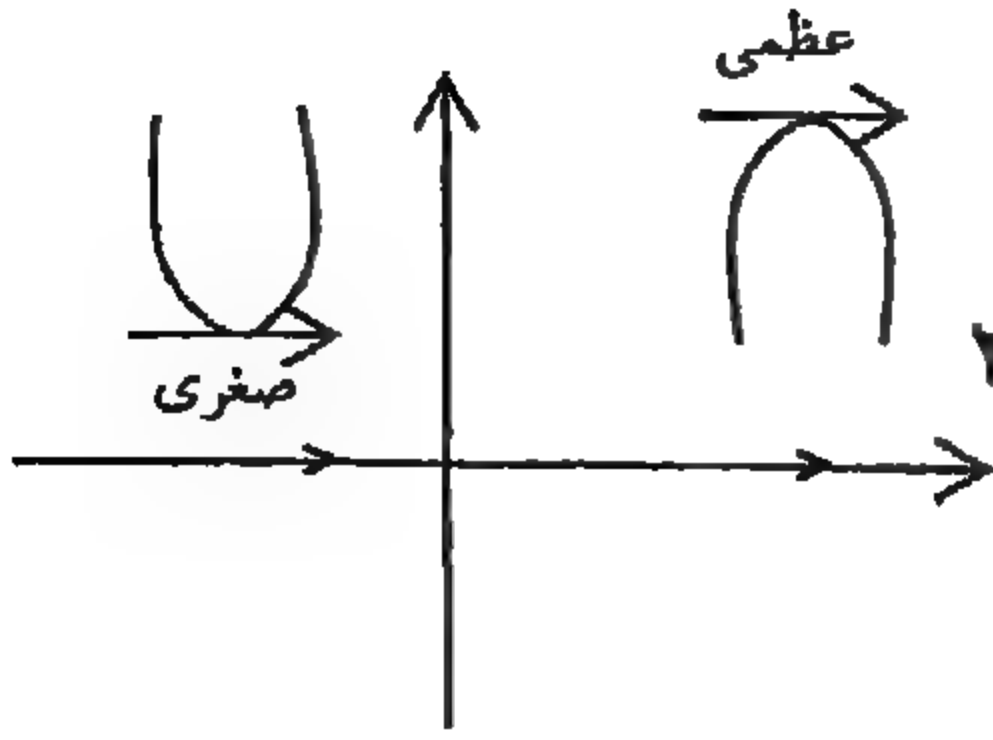


فاحداثيات رأس القطع المكافئ السابق

$$٢ ص = س^٢ + ٨ س + ٢٢$$

نجد النقطة الحرجة بعد قسمة الطرفين على ٢

$$ص = \frac{١}{٢} س^٢ + ٤ س + ١١$$



$$\frac{د ص}{د س} = س + ٤ = صفر \leftarrow س = -٤$$

ص = ق =  $(-٤) = \frac{١}{٢} (-٤)^٢ + ٤(-٤) + ١١ = ٣$  وهي صغرى كونه مفتوح لأعلى

∴ احداثيات الرأس و  $(-٤, ٣)$  كما نتج من اكمال المربع أعلاه.

الشق (ii): وباستخدام الملحوظة (i) وبشكل عام فإن احداثيات رأس القطع المكافئ الصادي بالاشتقاق كما يلي:

$$\text{ليكن: } ص = ق (س) = أ س^٢ + ب س + ج$$

$$ق (س) = ٢ أ س + ب$$

$$\text{ومنها } ٢ أ س + ب = صفر \leftarrow س = -\frac{ب}{٢ أ}$$

$$\text{ومنها } ص = ق \left( -\frac{ب}{٢ أ} \right)$$

∴ احداثيات رأس القطع المكافئ  $\left( -\frac{ب}{٢ أ}, \frac{٤ أ ج - ب^٢}{٤ أ} \right)$  مباشرة

مثال:

$$\text{ما احداثيات رأس القطع المكافئ } ص = -س^٢ - ٢ س - ٩$$

$$\frac{د ص}{د س} = -٢ س - ٢ = صفر \leftarrow س = -١$$

$$\text{الاحداثي الصادي: } ص = ق(-١) = -(-١)^٢ - ٢(-١) - ٩ = -٨$$

$$ص = -٨ = -٩ + ٢ - ١$$

∴ احداثيات رأس القطع المكافئ  $(-١, -٨)$



## المقطع المخروطية



### الملحوظة الثانية:

لإيجاد معادلة مماس القطع المكافئ عند أي نقطة عليه ولييان ارتباط المقطوع المخروطية بالتفاضل مرة أخرى نجد:

$$\frac{دص}{دس} = \frac{1}{س} = م مماس ثم المعادلة ص - ص_1 = م مماس (س - س_1)$$

مثال:

أوجد معادلة المماس والعامودي عليه للقطع المكافئ  $ص = \frac{1}{2}س^2 + 4س + 11$  عند النقطة أ  $(-2, 5)$

نعوض النقطة لنرى هل تقع عليه أم لا هكذا:

$$ق (-2) = \frac{1}{2}(-2)^2 + 4(-2) + 11 = 5$$

$\therefore (-2, 5)$  تقع عليه

$$\frac{دص}{دس} = س + 4 \leftarrow م مماس = -2 = 4 + 2$$

معادلة المماس:

$$ص - 5 = 2(س - (-2)) \leftarrow ص = 2س + 9 \text{ معادلة المماس}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{م مماس} = م العامودي$$

معادلة العامودي:

$$ص - 5 = -\frac{1}{2}(س - (-2)) \leftarrow ص = -\frac{1}{2}س + 4 \text{ معادلة العامودي}$$

مثال:

اكتب معادلة القطع المكافئ الذي رأسه و  $(-1, 1)$  ومعادلة دليله

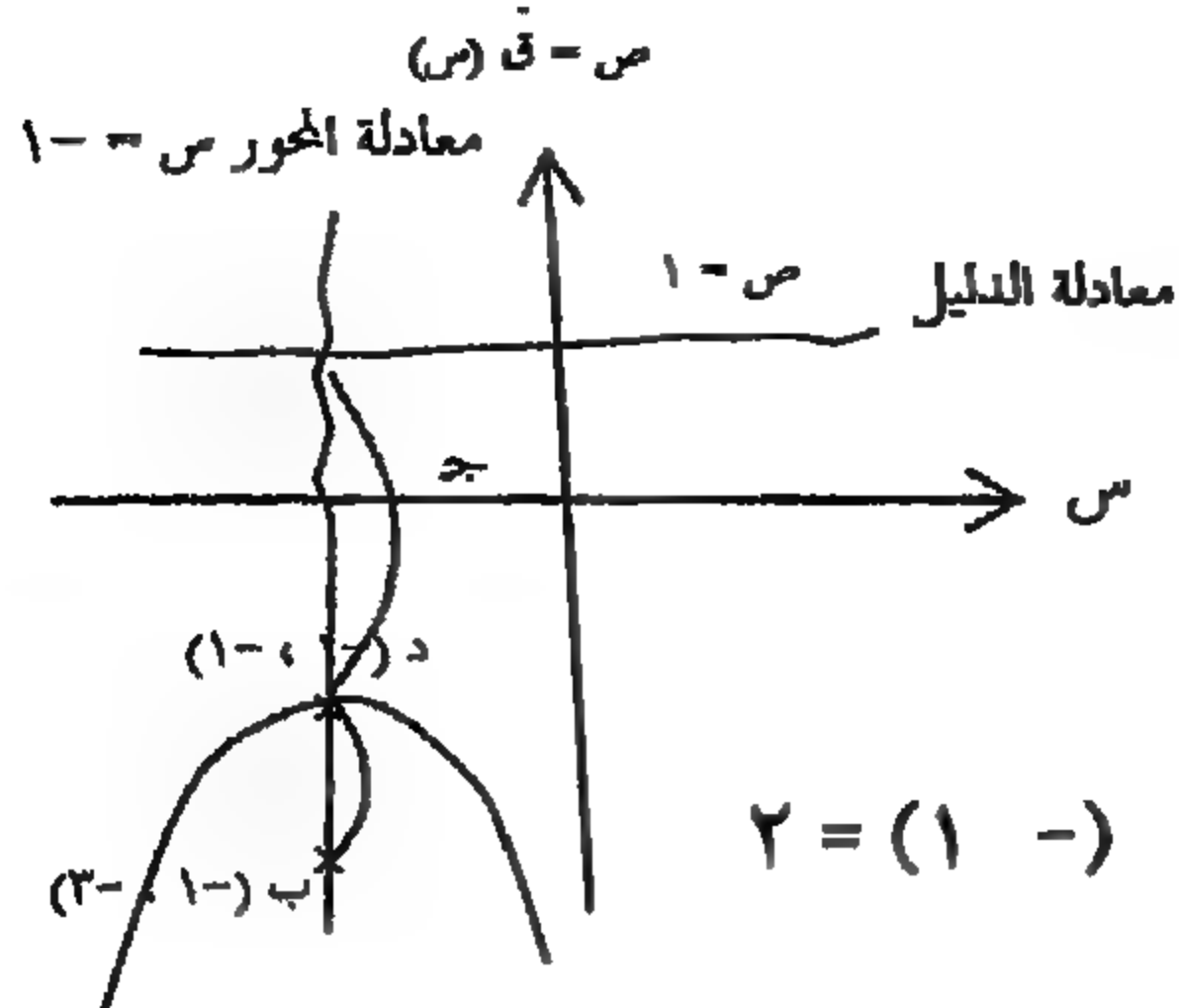
ص = 1 وارسم منحناه



## المقطع المخروطية



نبدأ بالرسم:



بما أن البؤرة باتجاه معاكس للدليل فهو

صادي مفتوح للأسفل، ومعادلته القياسية

$$(س - د)^2 = ٤ - ج (ص - هـ)$$

$$\text{ونجد: ج = البعد بين الدليل والرأس} = ١ - (١ - ١) = ٢$$

احداثيات البؤرة ب (١ - ، ٣ -)

معادلته القياسية:

$$(س - ١)^2 = ٤ - (٢) (ص - ١)$$

$$(س + ١)^2 = ٨ - (ص + ١) \text{ الصورة القياسية}$$

وبعد فك الأقواس تتحول المعادلة الى الصورة العامة هكذا:

$$س^2 + ٢س + ١ = ٨ - ص - ١$$

$$\text{ومنها } ٨ - ص - ١ = س^2 + ٢س + ١ \text{ اعادة الترتيب}$$

$$\text{ومنها } \frac{٨ - ص}{٨} = \frac{س^2 + ٢س + ١}{٨}$$

$$ص = \frac{١}{٨} - س^2 - \frac{٢}{٨} س - \frac{٩}{٨}$$

وللتحقق فإنه صادي مفتوح للأسفل لأن  $-\frac{١}{٨} > ٠$  صفر، إشارة أ سالبة

كما مرّ سابقاً

مثال تطبيقي:

قذف جسم رأسياً لأعلى حسب العلاقة  $٢٠ - ٥ = ٢٠$  حيث ن الزمن

بالثواني، ف المسافة بالأمتار. احسب أقصى ارتفاع يصل اليه الجسم باستخدام

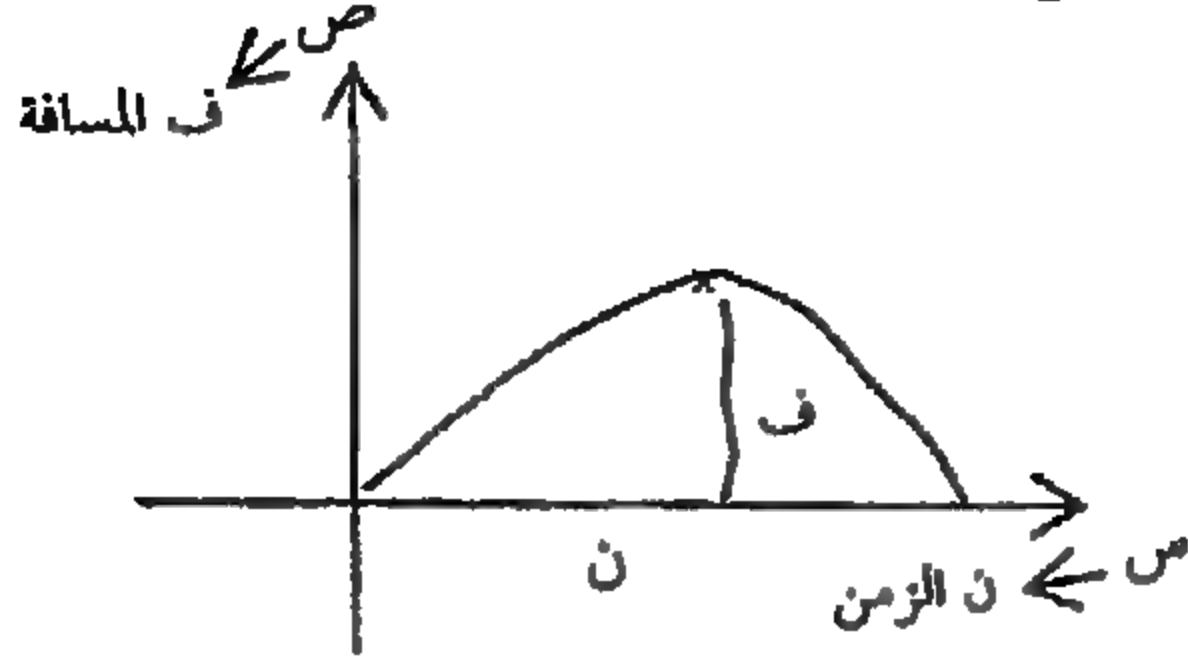
تعريف القطع المكافئ ثم باستخدام التفاضل وعن طريقة المشتقة الأولى.

## المقطوع المخروطية



بالمقطوع المخروطية:

نجد احداثيات القطع المكافئ باكمال المربع هكذا:



$$- ( - ٥ ن^٢ + ٢٠ ن = ف )$$

$$\frac{٥}{٥} ن^٢ - \frac{٢٠}{٥} ن = \frac{ف}{٥}$$

$$ن^٢ - ٤ ن = - \frac{١}{٥} ف$$

بإضافة مربع نصف معامل ن (كونه صادي)

$$ن^٢ - ٤ ن + ٤ = ٢٢ + ف - \frac{١}{٥}$$

$$(ن - ٢)^٢ = ٢٢ + ف - \frac{١}{٥}$$

∴ احداثيات الرأس و (٢ ، ٢٠)

أي بعد ٢ ثانية، وأقصى ارتفاع = ٢٠ متر

بالاشتقاق: من الشكل قيمة قصوى ← عظمى

ف = صفر لإيجاد النقطة الحرجة

$$ف = ٢٠ - ١٠ ن = صفر \leftarrow ن = ٢ \text{ ثانية}$$

$$\text{العظمى} = ف = (٢) ٢٠ - (٢) ٥ = ٢٠ - ٤٠ = ٢٠ \text{ متر أقصى ارتفاع.}$$

أو كتطبيقات فيزيائية:

$$ع = ف = ٢٠ - ١٠ ن = صفر \text{ السرعة} = صفر$$

ومنها ن = ٢ ثم ف = ٢٠ م أقصى ارتفاع

مثال:

تتحرك نقطة و (س ، ص) على منحنى بحيث يُحدد موضعها في اللحظة ن،

(ن ≤ صفر) بالمعادلتين التاليتين:



### المقطع المخروطية



س = جتا ٢ ن ، ص = جتا ن :

أوجد معادلة المنحنى الذي تسير عليه النقطة ونوعه.

نربط ص ب س هكذا:

$$\text{جتا } ٢ \text{ ن} = ٢ \text{ جتا } ٢ \text{ ن} - ١$$

$$\text{س} = ٢ \text{ ص} - ١ \quad \leftarrow$$

$$\frac{٢}{٢} \text{ ص} = \frac{١ + \text{س}}{٢}$$

$$\text{ص} = \frac{١}{٢} (١ + \text{س}) \quad \text{معادلة المنحنى}$$

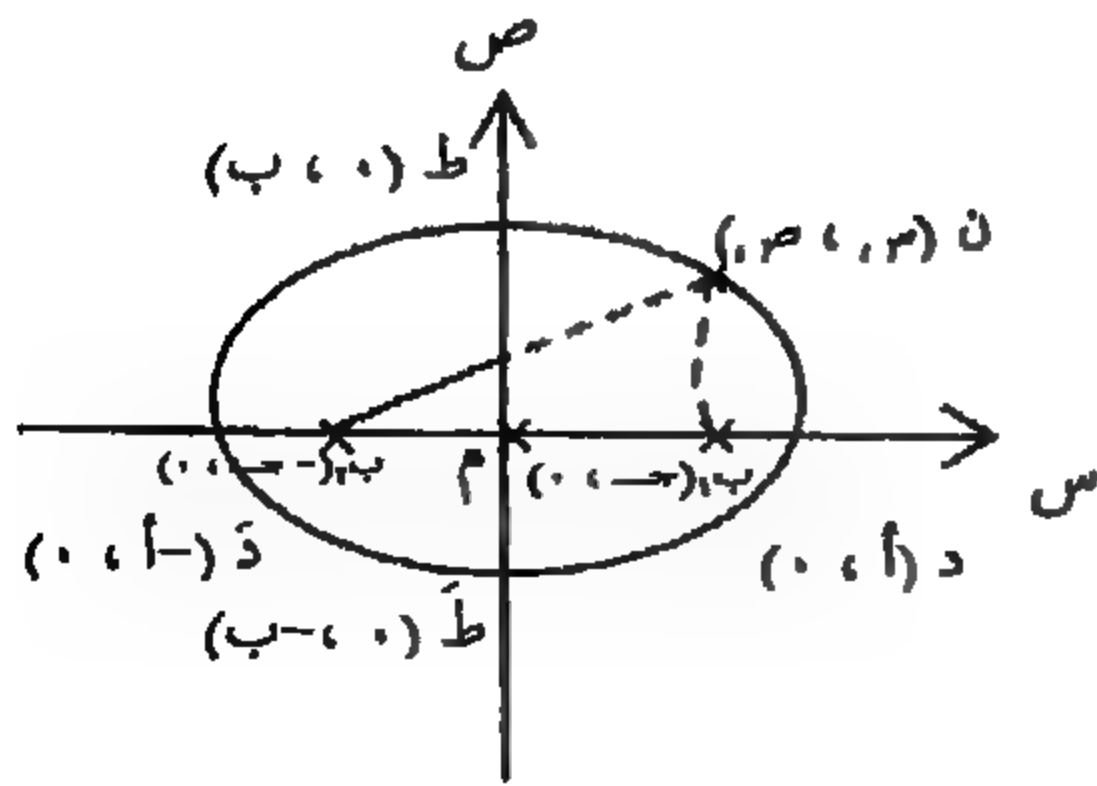
قطع مكافئ سيني مفتوح للأعلى.

=

### (٢٣ - ٣) القطع الناقص Ellipse:

القطع الناقص مجموعة من النقط تقع في مستوى واحد ويكون مجموع بعدها عند نقطتين ثابتتين هما ب<sub>١</sub> ، ب<sub>٢</sub> تسميان البؤرتين مقداراً ثابتاً يساوي ٢ أ وهو طول المحور الأكبر للقطع والواقعان في المستوى نفسه.

وأما بلغة الحل الهندسي: فالقطع الناقص هو مسار نقطة متحركة ن (س ، ص)

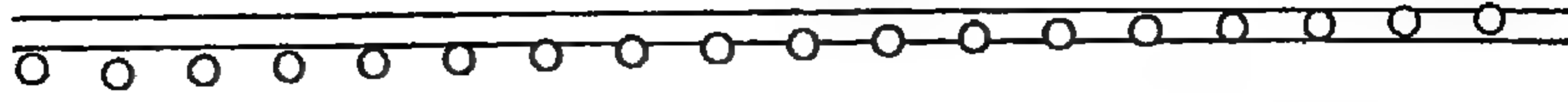


بحيث يكون مجموع بعدها عن النقطتين الثابتتين ب<sub>١</sub> ، ب<sub>٢</sub> (تسميان البؤرتين) مقداراً ثابتاً هو ٢ أ = طول المحور الأكبر كما في الشكل. فمكونات القطع الناقص هي:

(i) محورين للتماثل هما:

المستقيم المار بالبؤرتين ويسمى المحور الأكبر  $٢ أ =$

## المقطع المخروطية



والمستقيم العامودي على المستقيم الواصل بين البؤرتين ب<sub>1</sub> ، ب<sub>2</sub> والمنطبق على ط<sub>1</sub> ط<sub>2</sub> ويسمى المحور الأصغر ط<sub>1</sub> ط<sub>2</sub> = ٢ ب

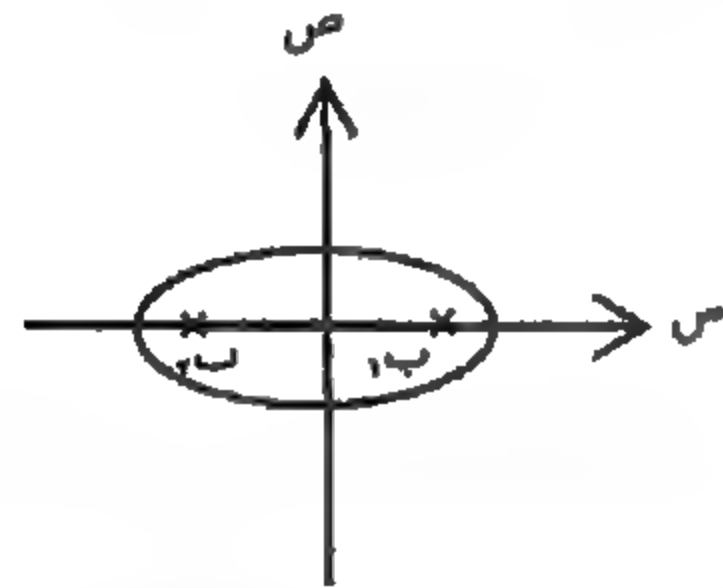
(ii) البؤرتان ب<sub>1</sub> (ج ، ٠) ، ب<sub>2</sub> (- ج ، ٠) حيث ج هي البعد بين إحدى البؤرتين والمركز Center م (٠ ، ٠) حالياً.

ويسمى الطول ب<sub>1</sub> ب<sub>2</sub> البعد البؤري Focal Dimension ويساوي ٢ ج.

(iii) الرأسان ر ، ر حيث تسمى النقطة مركز المحور الأكبر، وطولها ٢ أ وتسمى النقطة ط<sub>1</sub> ط<sub>2</sub> المحور الأصغر وطولها ٢ ب

وأما معادلة القطع الناقص بالصورة القياسية فهي اثنتان هما:

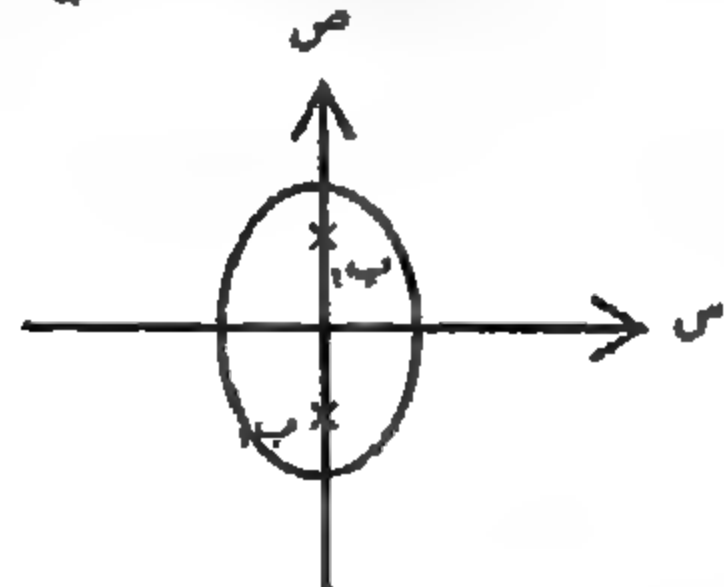
المعادلة الأولى: مركزه م (٠ ، ٠) نقطة الأصل، ومحوره الأكبر منطبق على محور السينات وطوله ٢ أ ويسمى القطع الناقص السيني.



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

المعادلة هي: كما في الشكل.

المعادلة الثانية: مركزه م (٠ ، ٠) نقطة الأصل ومحوره الأكبر منطبق على محور الصادات وطوله ٢ أ ويسمى القطع الناقص الصادي.



$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

المعادلة هي: كما في الشكل.

حيث ٢ أ المحور الأكبر Major Axis المار بالبؤرتين وهو المهم هنا ٢ ب المحور

الأصغر Minor Axis.

فاسم القطع الناقص السيني أو الصادي مأخوذ من المقام، فإذا كان مقام

س<sup>٢</sup> هو أ<sup>٢</sup> فهو سيني، وإذا كان مقام ص<sup>٢</sup> هو أ<sup>٢</sup> فهو صادي، حيث ٢ أ هو المحور الأكبر المار بالبؤرتين.



### المقطع المخروطية



وهناك الاختلاف المركزي Eccentricity ويُعرف بأنه النسبة بين ج ، أ ويرمز له بالرمز: هـ  $\frac{ج}{أ} = هـ$  حيث ج > أ دائماً. لذا فإن هـ > ١ أيضاً. ولهذا السبب سُمي بالناقص لأن هـ يقل أو ينقص عن الواحد الصحيح.

فمكونات القطع الناقص وبإيجاز شديد:

مركز م (٠ ، ٠) وبؤرتين ب<sub>١</sub> (ج ، ٠) ، ب<sub>٢</sub> (- ج ، ٠) إذا كان سيني أو ب<sub>١</sub> (٠ ، ج) ، ب<sub>٢</sub> (٠ ، - ج) إذا كان صادي ومحورين ٢ أ الأكبر ، ٢ ب الأصغر، واختلاف مركزي هـ  $\frac{ج}{أ} > ١$  ثم لا تتسى أن ج<sup>٢</sup> = أ<sup>٢</sup> - ب<sup>٢</sup> ، ج = البعد بين المركز واحد البؤرتين.

مثال:

عيّن مكونات القطع الناقص  $١ = \frac{ص^٢}{٢} + \frac{س^٢}{٩}$  وارسم منحناه.

بما أن مقام س<sup>٢</sup> (٩) < مقام ص<sup>٢</sup> (٢) فالقطع سيني.

والصورة القياسية لمعادلته  $١ = \frac{ص^٢}{٢} + \frac{س^٢}{٩}$

ومنها أ<sup>٢</sup> = ٩ ← أ = ٣

ب<sup>٢</sup> = ٢ ، ب =  $\sqrt{٢}$

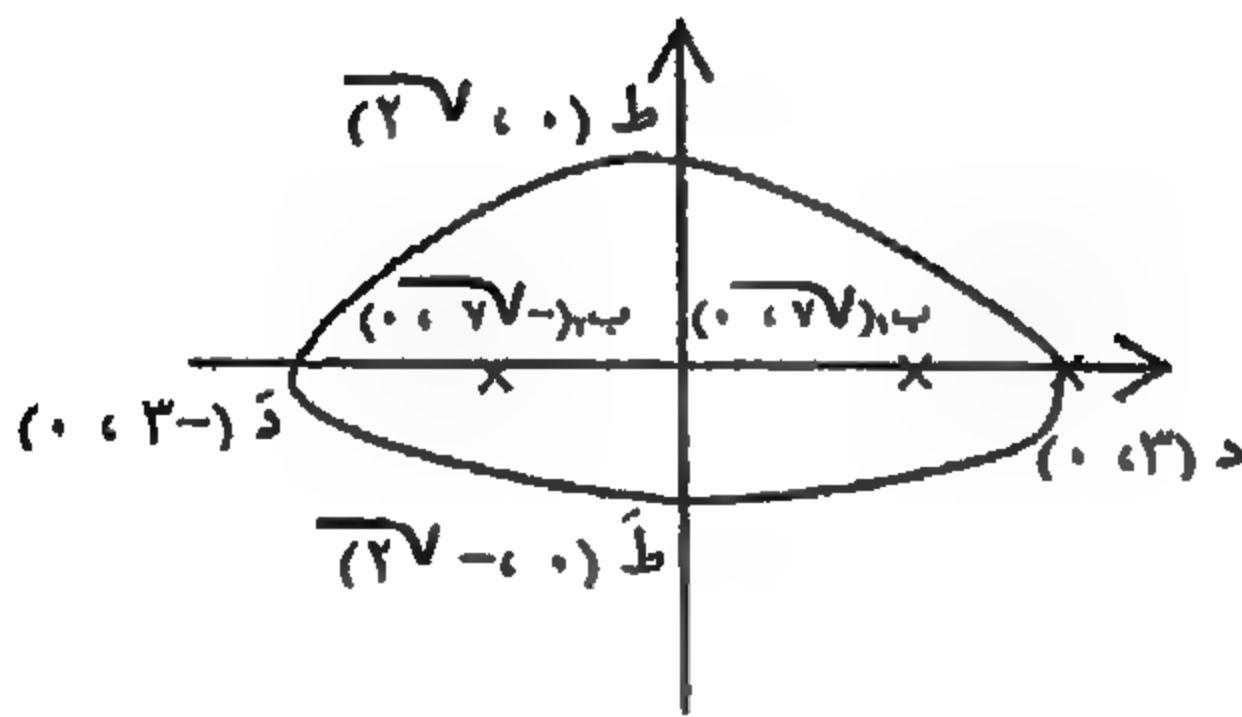
لكن ج<sup>٢</sup> = أ<sup>٢</sup> - ب<sup>٢</sup>

ج<sup>٢</sup> = ٩ - ٢ = ٧

ج =  $\sqrt{٧}$  دائماً موجبة

فالمركز م (٠ ، ٠)

والبؤرتان ب<sub>١</sub> ( $\sqrt{٧}$  ، ٠) ، ب<sub>٢</sub> (-  $\sqrt{٧}$  ، ٠)



### المقطع المخروطية



والمحور الأكبر  $2 = 3 \times 2 = 6$  وحدات وهو منطبق على محور السينات ومعادلته  
ص = صفر والمحور الأصغر  $2 = 2 \times 2 = 4$  وحدات وهو منطبق على  
محور الصادات ومعادلته س = صفر

$$1 > \frac{2}{3} = \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

لأن  $2 > 3$  كما هو معلوم

مثال:

أوجد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وطول محوره  
الأصغر = 4 ومحوره الأكبر على محور الصادات والمسافة بين البؤرتين  $5\sqrt{2}$  ،  
بما أن محوره الأكبر على محور الصادات فهو صادي معادلته القياسية:

$$1 = \frac{ص^2}{ب^2} + \frac{س^2}{ا^2}$$

$$لكن 2 = ب ← 2 = ب ← 4 = ا$$

$$البعد البؤري = 2 ← 2 = ج ← 5\sqrt{2} = ج$$

$$لكن ج = ا - ب$$

$$4 - ا = 5 \leftarrow 4 - ا = 2(5\sqrt{2})$$

$$ا = 9$$

$$فالمعادلة: 1 = \frac{ص^2}{9} + \frac{س^2}{4}$$

$$1 > \frac{5}{3} = \frac{5}{3} = \frac{5}{3}$$

لأن  $5 > 3$  كما هو معلوم.

وتعميماً لمعادلتي القطع الناقص السابقتين بواسطة الانسحاب حيث:

المركز م (0 ، 0) ← الانسحاب ← المركز و (د ، هـ) هما:



### المقطع المخروطية



$$1 = \frac{(ص - هـ)^2}{ب^2} + \frac{(س - د)^2}{أ^2} \quad \text{السيني}$$

معادلة القطع الناقص السيني الذي مركزه م (د ، هـ) ومحوره الأكبر يوازي محور السينات أو ينطبق عليه وطوله ٢ أ ومعادلته ص = هـ ومحوره الأصغر يوازي محور الصادات أو ينطبق عليه ومعادلته س = د

$$1 = \frac{(ص - هـ)^2}{أ^2} + \frac{(س - د)^2}{ب^2} \quad \text{وكذلك الصادي:}$$

معادلة القطع الناقص الصادي الذي مركزه م (د ، هـ) ومحوره الأكبر يوازي محور الصادات أو ينطبق عليه وطوله ٢ أ ومعادلته س = هـ ومحوره الأصغر يوازي محور السينات أو ينطبق عليه وطوله ٢ ب ومعادلته ص = هـ

ملحوظة لا بد منها في هذا السياق:

فعند ايجاد مكونات القطع الناقص أو رسم منحناه يجب الاستعانة بالرسم مع الحل جنباً الى جنب، ثم نبدأ بإيجاد ج = البعد بين المركز واحدى البؤرتين وكأننا نجد أ ، ب ثم الرسم معاً.

مثال:

عين مكونات أو عناصر القطع الناقص:

$$1 = \frac{(ص - ١)^2}{٢٥} + \frac{(س - ٢)^2}{٩} \quad \text{وارسم منحناه أيضاً.}$$

بما أن مقام (ص - ١) < مقام (س - ٢) فهو صادي.

مركزه و(ص - ١) ومعادلته القياسية

$$1 = \frac{(ص - هـ)^2}{أ^2} + \frac{(س - د)^2}{ب^2}$$



## المقطع المخروطية

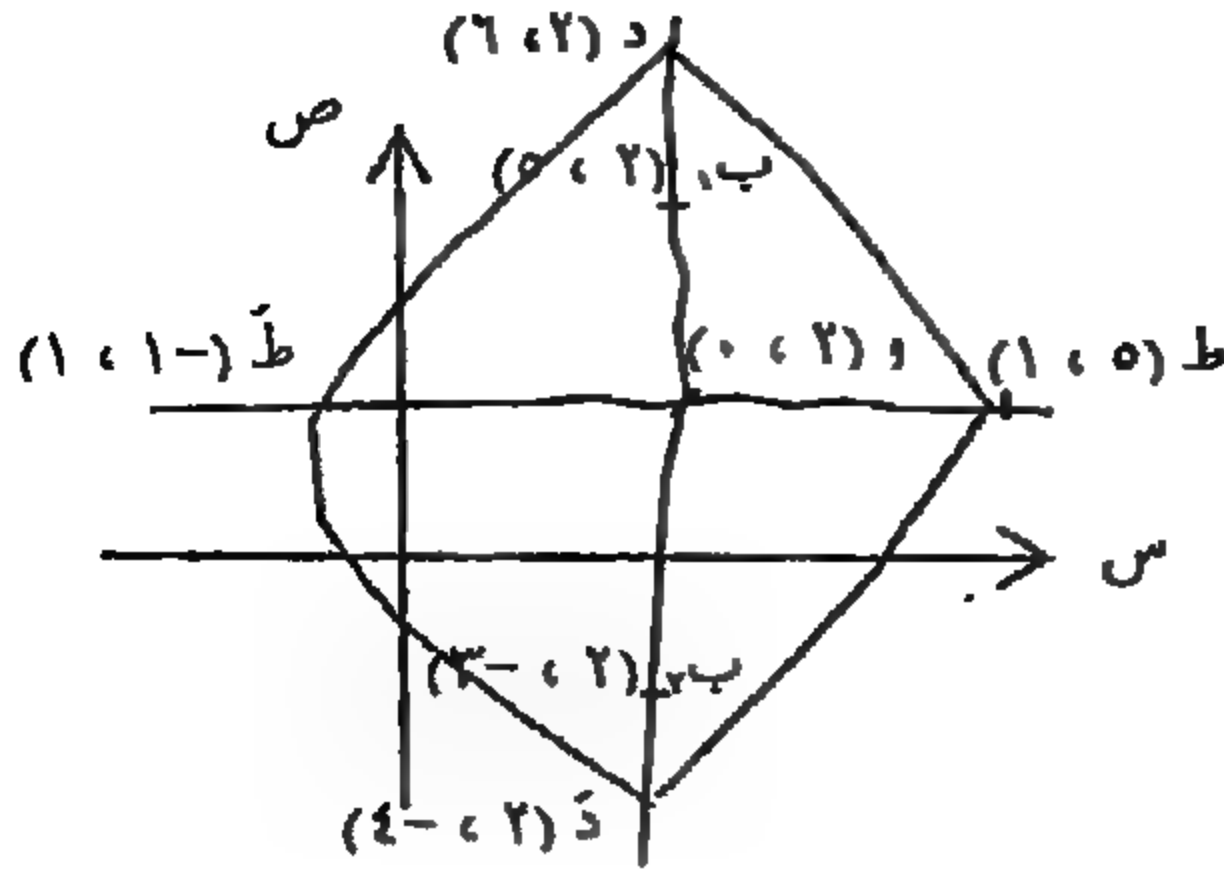


$$\text{أي أن } \sqrt{a} = 25 \leftarrow a = 5$$

$$\sqrt{b} = 9 \leftarrow b = 3$$

$$\sqrt{c} = 25 - 9 = 16$$

$$c = 4$$



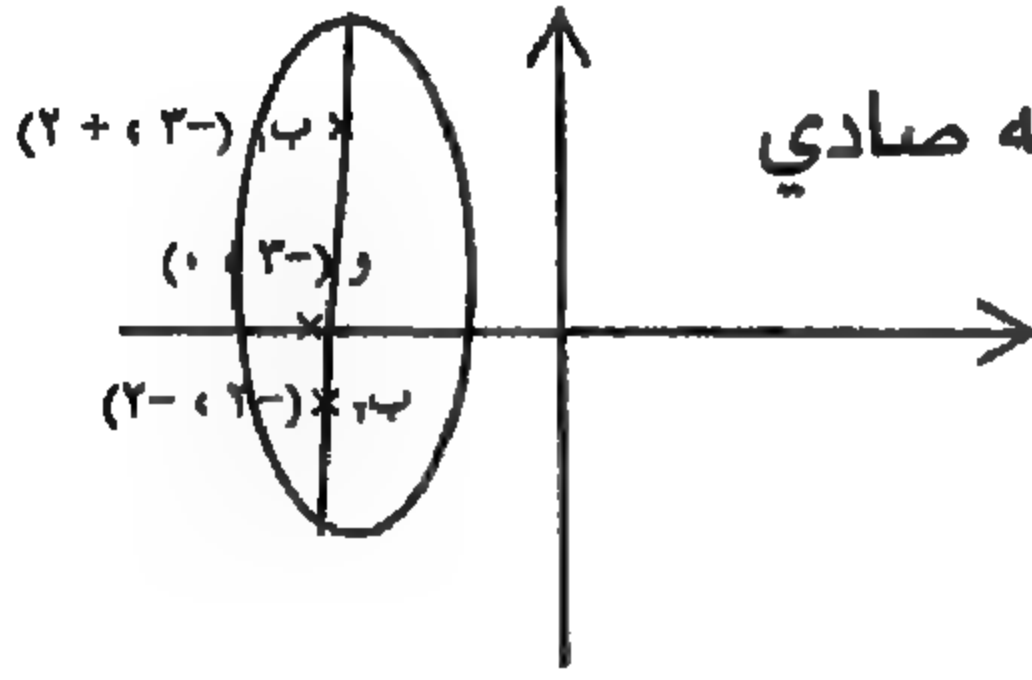
طول المحور الأكبر  $2a = 10$  ومعادلته  $s = 2$

طول المحور الأصغر  $2b = 6$  ومعادلته  $v = 1$

مثال:

ما معادلة القطع الناقص الذي مركزه  $(-3, 0)$  واحدى بؤرتيه

$(-2, 3)$  وطول محور الأكبر  $6$  وحدات؟



المعلومات المعطاة والرسم الموضح جانباً يقولان بأنه صادي

ومعادلته القياسية:

$$1 = \frac{(s-2)^2}{a^2} + \frac{(v-3)^2}{b^2}$$

ج = صفر -  $(-2) = 2$  البعد بين المركز واحدى البؤرتين

فبؤرتيه الثانية  $b = (2, 3)$

$$12 = 6 \leftarrow a = 3$$

$$\sqrt{b} = 2 \leftarrow b = 4$$

$$\sqrt{c} = 2 \leftarrow c = 4$$

$$b = 5$$

$$\text{فالمعادلة: } 1 = \frac{(s-0)^2}{9} + \frac{(v+3)^2}{5}$$

### المقطع المخروطية



ومنها: نجد المعادلة العامة هكذا:

بعد فك الأقواس وترتيب الحدود:

$$٩س^٢ + ٦ص^٢ + ٥٤س + ٨١ - ٤٥ = \text{صفر}$$

أي أن معادلته العامة:

$$٩س^٢ + ٦ص^٢ + ٥٤س + ٣٦ = \text{صفر}$$

مثال:

أوجد مركز وبؤرتي القطع الناقص الذي معادلته العامة:

$$١٦س^٢ + ٩ص^٢ + ٦٤س - ١٨ص - ٧١ = \text{صفر}$$

بواسطة اكمال المربعين وبالنسبة للمتغيرين نحول الصورة العامة الى قياسية

هكذا:

$$١٦س^٢ + ٦٤س + ٩ص^٢ - ١٨ص = ٧١$$

باخراج ١٦ من الأول و ٩ من الثاني هكذا:

$$١٦(س^٢ + ٤س) + ٩(ص^٢ - ٢ص) = ٧١$$

بإضافة مربع نصف معامل المتغير لكل من المتغيرين الى طرفي المعادلة:

$$١٦(س^٢ + ٤س + ٤) + ٩(ص^٢ - ٢ص + ١) = ٧١ + ٦٤ + ٩$$

$$١٦(س + ٢)^٢ + ٩(ص - ١)^٢ = ١٤٤$$

$$١٦(س + ٢)^٢ + ٩(ص - ١)^٢ = ١٤٤$$

$$١٤٤$$

$$١ = \frac{١٦(س + ٢)^٢}{١٤٤} + \frac{٩(ص - ١)^٢}{١٤٤}$$

## المقاطع المخروطية



المركز و (د، هـ) = (- ٢ ، ١)

$$\sqrt{7} = \sqrt{9 - 16} = \sqrt{-7} \leftarrow \text{لكن } \sqrt{7} = \sqrt{9 - 16} = \sqrt{-7}$$

البؤرتان ب، (- ٢ ، ١ + \sqrt{7}) ، ب، (- ٢ ، ١ - \sqrt{7})

$$1 > \frac{\sqrt{7}}{3} = \frac{1}{3} = \text{هـ} = \text{الاختلاف المركزي}$$

$$3 > \sqrt{7} \text{ كون}$$

مثال:

أوجد قيم ك ليكون المستقيم ٢ س + ص = ك مماساً  
للقطع الناقص ٤ س + ٢ ص = ٨ ثم أوجد نقط التماس.

"إرشاد" م مماس = م المنحنى

$$\text{م مماس: } ٢ س + ص = ك$$

$$ص = - ٢ س + ك$$

$$\frac{د ص}{د س} = - ٢ = \frac{د ص}{د س} \text{ (١) م مماس}$$

$$\text{م المنحنى: } ٤ س + ٢ ص = ٨$$

$$ص = - ٢ س + ٤$$

$$ص = \sqrt{٨ - ٤ س}$$

$$\frac{د ص}{د س} = \frac{- ٢ س}{٨ - ٤ س} = \frac{د ص}{د س} \text{ (٢) م المنحنى}$$

$$\frac{٢ -}{١} = \frac{- ٢ س}{٨ - ٤ س} \text{ أي أن } \frac{٢ -}{١} = \frac{- ٢ س}{٨ - ٤ س}$$

$$\frac{٤ -}{٨ - ٤ س} = \frac{- ٢ س}{٨ - ٤ س}$$

$$٢ س = \sqrt{٨ - ٤ س}$$

$$٨ = ٢ ص + ٤ (١ \pm)$$

$$٨ = ٢ ص + ٤$$

$$٤ = ٢ ص$$



## المقطع المخروطية



$$ص = \pm 2$$

نقط التماس:

$$أ_1 (1, 2), أ_2 (-1, -2)$$

$$ومنها 2 س + ص = ك$$

$$2 ك = (2 \pm) + (1 \pm) 2$$

$$ومنها ك = 2 + 2 = 4$$

$$أو - 2 - 2 = - 4$$

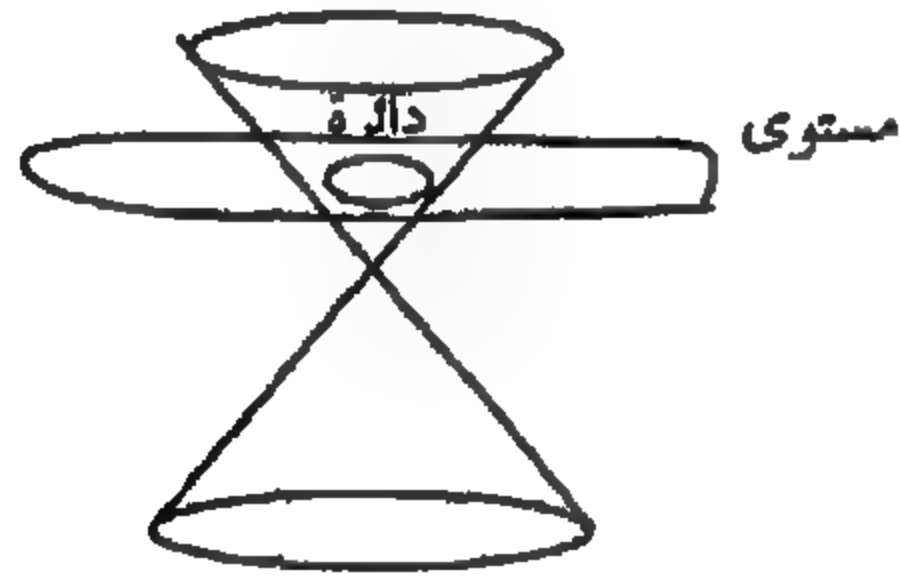
$$4 س^2 = - 4 س^2 + 8$$

$$8 س^2 = 8$$

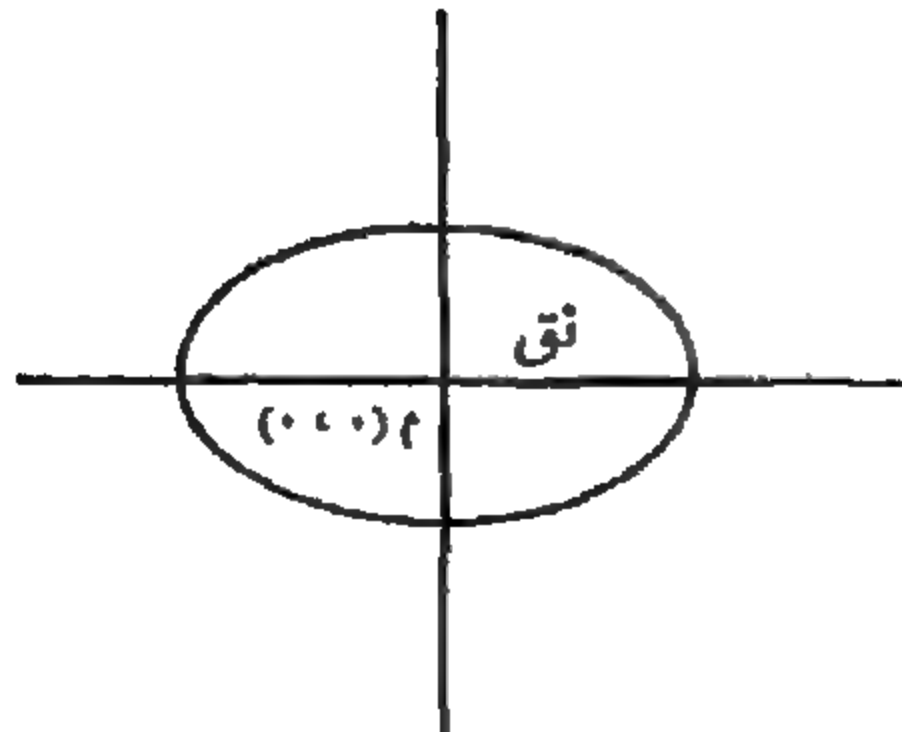
$$س = \pm 1$$

## الدائرة Circle:

أما الدائرة: فهي حالة خاصة للمقطع الناقص، فهندسياً تتكون الدائرة عندما يقطع مستوى مخروطاً مزدوجاً ويكون عامودياً على محور التماثل وغير مائل كما في الشكل.



أما جبرياً: فكأنها قطع ناقص تساوت فيه أطوال المحورين الأكبر والأصغر، فأصبحت بذلك أقطاراً فيها. كما في الشكل.



وبما أن معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل م (0, 0) وطول محوريه الأكبر 2 أ والأصغر 2 ب هي:

$$1 = \frac{ص^2}{ب^2} + \frac{س^2}{أ^2}$$

وحيث أن أ = ب = نق (نصف قطر الدائرة)

$$فإن (1 = \frac{ص^2}{نق^2} + \frac{س^2}{نق^2}) (نق^2)$$





### المقاطع المخروطية



أي  $s^2 + v^2 = \text{نق}^2$  معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل  $(0, 0)$  ونصف قطرها  $\text{نق}$  وحدة.

وعندما يصبح مركز الدائرة أي نقطة في المستوى مثل  $(د, هـ)$  فإن معادلتها تصبح:

$$(s - د)^2 + (v - هـ)^2 = \text{نق}^2$$

وهذه الصورة القياسية لمعادلة الدائرة.

وبعد فك الأقواس:

$$s^2 - 2sd + د^2 + v^2 - 2vh + هـ^2 = \text{نق}^2$$

$$\text{أي أن } s^2 + v^2 - 2sd - 2vh + د^2 + هـ^2 = \text{نق}^2 = \text{صفر}$$

المعادلة العامة للدائرة

ويمكن إيجاد معادلة الدائرة كما يلي:

مثال:

أوجد معادلة الدائرة التي مركزها  $(2, -3)$  ونصف قطرها 4 سم

$$(s - 2)^2 + (v + 3)^2 = 4^2 \quad \text{الصورة القياسية}$$

$$s^2 - 4s + 4 + v^2 + 6v + 9 = 16 \quad \text{صفر}$$

$$s^2 + v^2 - 4s + 6v - 3 = 0 \quad \text{صفر}$$

$$s^2 + v^2 - 4s + 6v - 3 = 0 \quad \text{صفر}$$

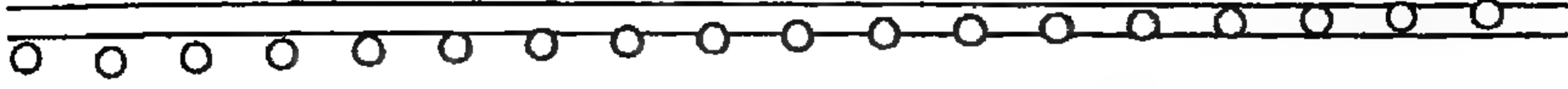
الصورة العامة للمعادلة أو المعادلة العامة.

كما يمكن إيجاد مركز الدائرة ونصف قطرها، وذلك بتحويل الصورة

العامة للدائرة الى الصورة القياسية بواسطة كمال المربعين كما يلي:

$$s^2 - 4s + v^2 + 6v - 3 = 0 \quad 143$$

## المقطوع المخروطية



مثال:

ما احداثيات مركز الدائرة التي معادلتها  $s^2 + 8s - 9 = 0$  وما طول نصف قطرها؟

يتم تحويل الصورة العامة الى القياسية هكذا:

$$(s^2 + 8s - 9) = 0$$

بإضافة مربع نصف معامل كل من المتغيرين الى طرفي المعادلة:

$$(s^2 + 8s - 9) + 16 = 16$$

$$(s + 4)^2 - 25 = 16$$

$$(s + 4)^2 = 41$$

ومنها  $s = -4 \pm \sqrt{41}$  احداثيات المركز

$$r = \sqrt{41}$$

مثال:

النقطة  $(s, t)$  تتحرك في المستوى الديكارتي بحيث أن:

$s^2 + 2s + 3 = 0$  ،  $t^2 + 5t + 3 = 0$  حيث  $t$  زاوية متغيرة. بين أن النقطة  $(s, t)$  تتحرك على محيط دائرة وأوجد نصف قطرها.

لنحاول ربط  $s$  مع  $t$  من المعطيات

$$s^2 + 2s + 3 = 0 \Rightarrow s^2 + 2s = -3$$

$$\frac{s^2 + 2s}{2} = -\frac{3}{2}$$

$$s + 1 = -\frac{3}{2}$$

$$s = -\frac{5}{2}$$



### المقطع المخروطية



لكن جا<sup>٢</sup> هـ + جتا<sup>٢</sup> هـ = ١ متطابقة دائرية مستوية

$$\text{اذن: } 1 = \left( \frac{\text{ص}^2 - 5}{3} \right) + \left( \frac{\text{س}^2 - 2}{3} \right)$$

وبفك الأقواس:

$$(1) = \frac{\text{ص}^2 - 5 + \text{ص} 10 - 20}{9} + \frac{\text{س}^2 - 2 + \text{س} 4 - 4}{9} + 9$$

$$\text{س}^2 - 2 + \text{س} 4 + 4 - \text{ص}^2 + \text{ص} 10 - 20 = 9$$

$$\text{أي أن: } \text{س}^2 + \text{ص}^2 - \text{س} 4 - \text{ص} 10 + 29 - 9 = \text{صفر}$$

$$\text{س}^2 + \text{ص}^2 - \text{س} 4 - \text{ص} 10 + 20 = \text{صفر} \quad \text{معادلة الدائرة}$$

ولإيجاد نصف قطرها نحولها الى الصورة القياسية بواسطة اكمال المربعين

هكذا:

$$20 - = (\text{ص}^2 - 10\text{ص}) + (\text{س}^2 - 4\text{س})$$

بإضافة مربع نصف معامل كل من المتغيرين الى طرفي المعادلة:

$$20 - = (\text{ص}^2 - 10\text{ص} + 25) + (\text{س}^2 - 4\text{س} + 4) - 25 - 4$$

$$20 - = (\text{ص} - 5)^2 + (\text{س} - 2)^2 - 29$$

$$9 = (\text{ص} - 5)^2 + (\text{س} - 2)^2$$

$$\text{ومنها نق}^2 = 9$$

$$\text{ومنها: نق} = 3 \text{ سم} \quad \text{نصف قطر الدائرة.}$$

$$(23 - 4) \text{ القطع الزائد Hyperbola:}$$

والقطع الزائد مجموعة من النقط الواقعة في مستوى واحد ويكون الفرق

المطلق بين بعديها عن نقطتين ثابتتين تسميان البؤرتين ب<sub>١</sub> ، ب<sub>٢</sub> مقداراً ثابتاً يساوي

٢ أ طول المحور القاطع Transverse Axis الذي يمر بالبؤرتين الواقعتين في المستوى

نفسه كما في الشكل.

متحرکة ن (س ، ص) بحيث يكون الفرق

ثابتاً = ٢ أ طول المحور القاطع. كما في

$|n \text{ ب}_2 - n \text{ ب}_1| = 2$  وأما معادلتا القطع الزائد القياسيتان عندما مركزه نقطة الأصل.

$$1 = \frac{ص^2}{ب^2} - \frac{ع^2}{ا^2}$$

وأما معادلة القطع الزائد الصادي (محوره منطبق على محور الصادات ومركزه نقطة الأصل) هي:

$$1 = \frac{s^2}{c^2} - \frac{v^2}{c^2}$$

وبغض النظر عن قيمتي أ ، ب إطلاقاً.

والاختلاف المركزي هـ =  $\frac{ج}{ا} < ١$  لأن ج < ا دائماً

"لهذا السبب س زائد كون ه يزيد على الواحد الصحيح"

حسب العلاقة:  $J^2 = A^2 + B^2$  حيث  $J$  البعد بين مركزيه واحدى بؤرتيه.

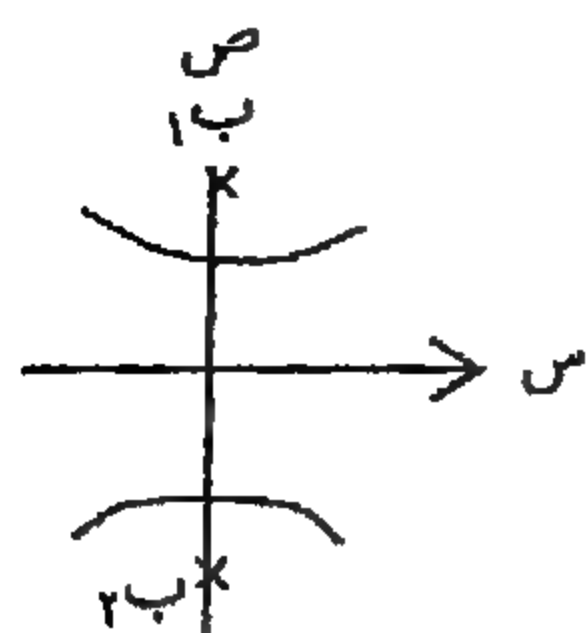
### فمكونات القطع الزائد السيني:

مرکز  $(0, 0)$ ، رأسان  $(0, 1)$ ،  $(-1, 0)$

## المقطع المخروطية



بؤرتان ب<sub>١</sub> (ج ، ٠) ، ب<sub>٢</sub> (- ج ، ٠) محور قاطع المار بالبؤرتين ومحور مرافق غير المار بالبؤرتين.



وعندما يكون صادي فالرأسان ر (أ ، ٠) ، ر (أ - ، ٠)

والبؤرتان ب<sub>١</sub> (ج ، ٠) ، ب<sub>٢</sub> (- ج ، ٠)

مثال:

أوجد مكونات القطع الزائد ٩ س<sup>٢</sup> - ١٦ ص<sup>٢</sup> = ١٤٤

بالقسمة على ١٤٤ لجعل الطرف الأيسر "١" صحيح

$$\frac{١٤٤}{١٤٤} = \frac{٩ س^٢}{١٤٤} - \frac{١٦ ص^٢}{١٤٤}$$

فهو سيني كون إشارة س<sup>٢</sup> موجبة،

$$١ = \frac{س^٢}{٩} - \frac{ص^٢}{١٦}$$

ومركزه نقطة الأصل.

$$١٦ = أ^٢ \leftarrow أ = ٤$$

الرأسان (٠ ، ٤) ، (٠ ، -٤)

$$٩ = ب^٢ \leftarrow ب = ٣$$

$$ج^٢ = أ^٢ + ب^٢ = ١٦ + ٩ = ٢٥$$

$$ج = \sqrt{٢٥} \approx ٥$$

البؤرتان ب<sub>١</sub> (٠ ، ٥) ، ب<sub>٢</sub> (٠ ، -٥)

طول المحور القاطع ٢ (٤) = ٨

طول محوره المرافق ٢ (٣) = ٦

$$هـ = \frac{ج}{أ} = \frac{٥}{٤} < ١ \text{ دائماً.}$$

## المقطع المخروطية



مثال:

أوجد معادلة القطع الزائد الذي طول محوره القاطع  $\epsilon$  وحدات، ويؤرتاه

$$(\pm 8\sqrt{7}, 0)$$

الرسم يقول بأنه صادي،

ومعادلته القياسية:

$$1 = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

$$\text{ومنها } 2a = 16 \Rightarrow a = 8$$

$$\text{رأساه } (8, 0), (-8, 0)$$

$$c = 8\sqrt{7}$$

$$\text{لكن } c^2 = a^2 + b^2$$

$$144 = 64 + b^2 \Rightarrow b^2 = 80$$

$$\text{فالمعادلة: } 1 = \frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{80}$$

ولإيجاد معادلتَي القطع الزائد القياسيتين والذي مركز كل منها و(د، هـ)

بواسطة الانسحاب م(0، 0-) إلى و(د، هـ)

كما يلي:

المعادلة القياسية للقطع الزائد الذي مركزه و(د، هـ) ومحوره القاطع

يوازي محور السينات أو ينطبق عليه، وطوله  $2a$  ومعادلته  $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$

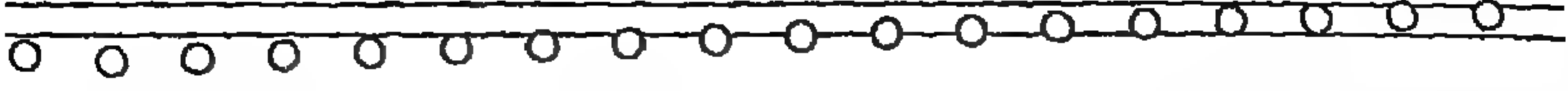
ومحوره المرافق يوازي أو ينطبق على محور الصادات ومعادلته  $y^2/b^2 - x^2/a^2 = 1$

$$\text{هي السيني: } 1 = \frac{(x-d)^2}{a^2} - \frac{(y-h)^2}{b^2}$$

وبأسلوب مماثل فإن معادلة القطع الزائد:

$$\text{الصادي: } 1 = \frac{(y-h)^2}{b^2} - \frac{(x-d)^2}{a^2}$$

### المقطع المخروطية



ملحوظتان:

الأولى: بالنسبة للمقطع المخروطية الثلاثة (مكافئ ، ناقص ، زائد) فإن ج موجب

دائماً ، وللتمييز بين قيمة كل منها:

بالنسبة للمقطع المكافئ ← ج = البعد بين الرأس والبؤرة

بالنسبة للمقطع الناقص ← ج = البعد بين المركز واحد البؤرتين

فهنا ج > أ دائماً

بالنسبة للمقطع الزائد ← ج = البعد بين المركز واحد البؤرتين

فهنا ج < أ دائماً

الثانية: الاختلاف المركزي هـ:

بالنسبة للمقطع المكافئ هـ = ١ دائماً لأن ن ب = ن ك وهما متساويان بالفرق

بالنسبة للمقطع الناقص هـ =  $\frac{ج}{أ}$  ولما كانت ج > أ

فإن هـ > ١ دائماً

بالنسبة للمقطع الزائد هـ =  $\frac{ج}{أ}$  ولما كانت ج < أ

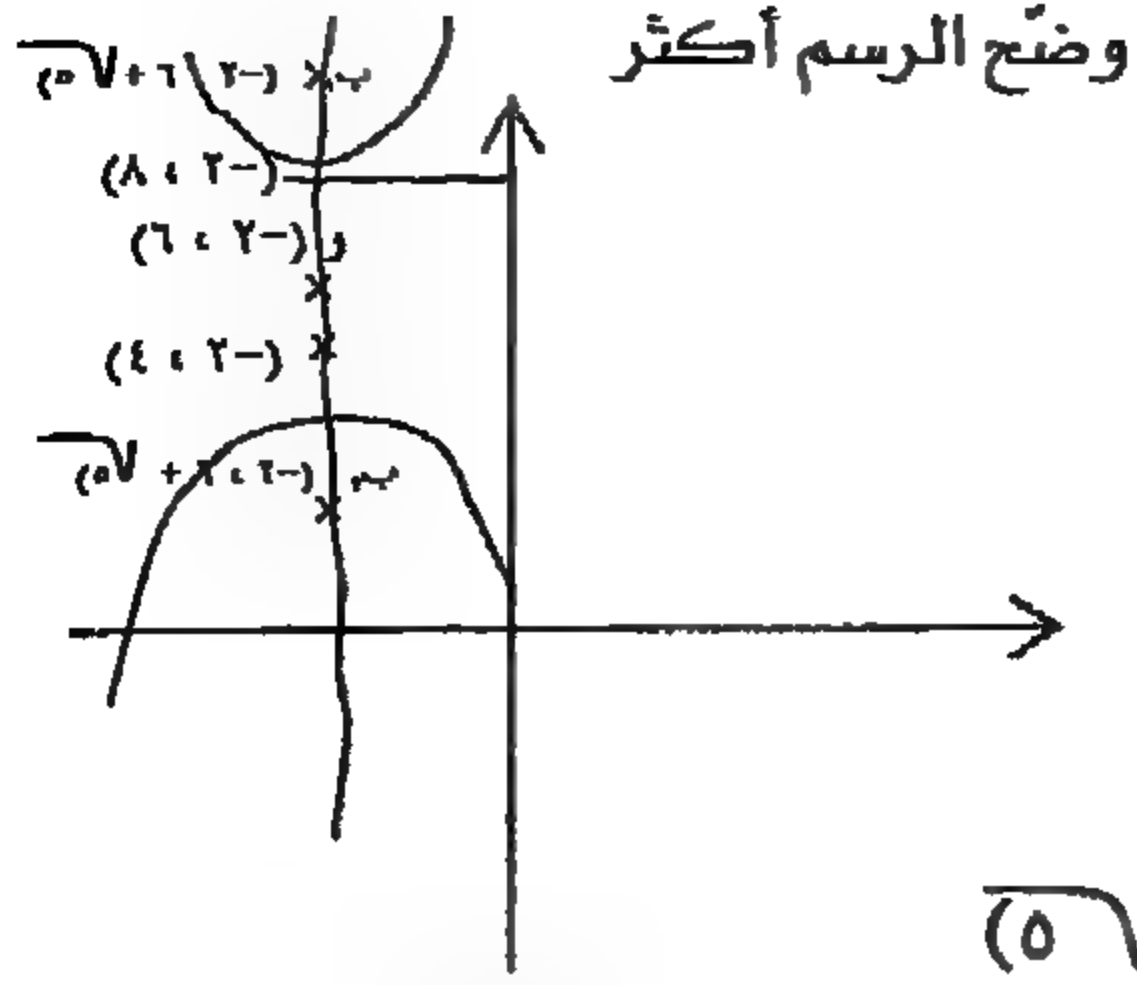
فإن هـ < ١ دائماً

مثال:

$$\begin{aligned} \text{أوجد مكونات القطع الزائد} \quad ١ &= \frac{(ص-٦)^2}{٤} - \frac{(س-٢)^2}{١} \text{ وارسم منحناه} \\ \text{انه صادي كون اشارة (ص - ٦) موجبة ومعادلته} \quad &\frac{(ص-٦)^2}{٤} - \frac{(س-٢)^2}{١} \\ &= ١ \quad \text{مركزه و (٢ ، ٦)} \end{aligned}$$



## المقتطوع المخروطية



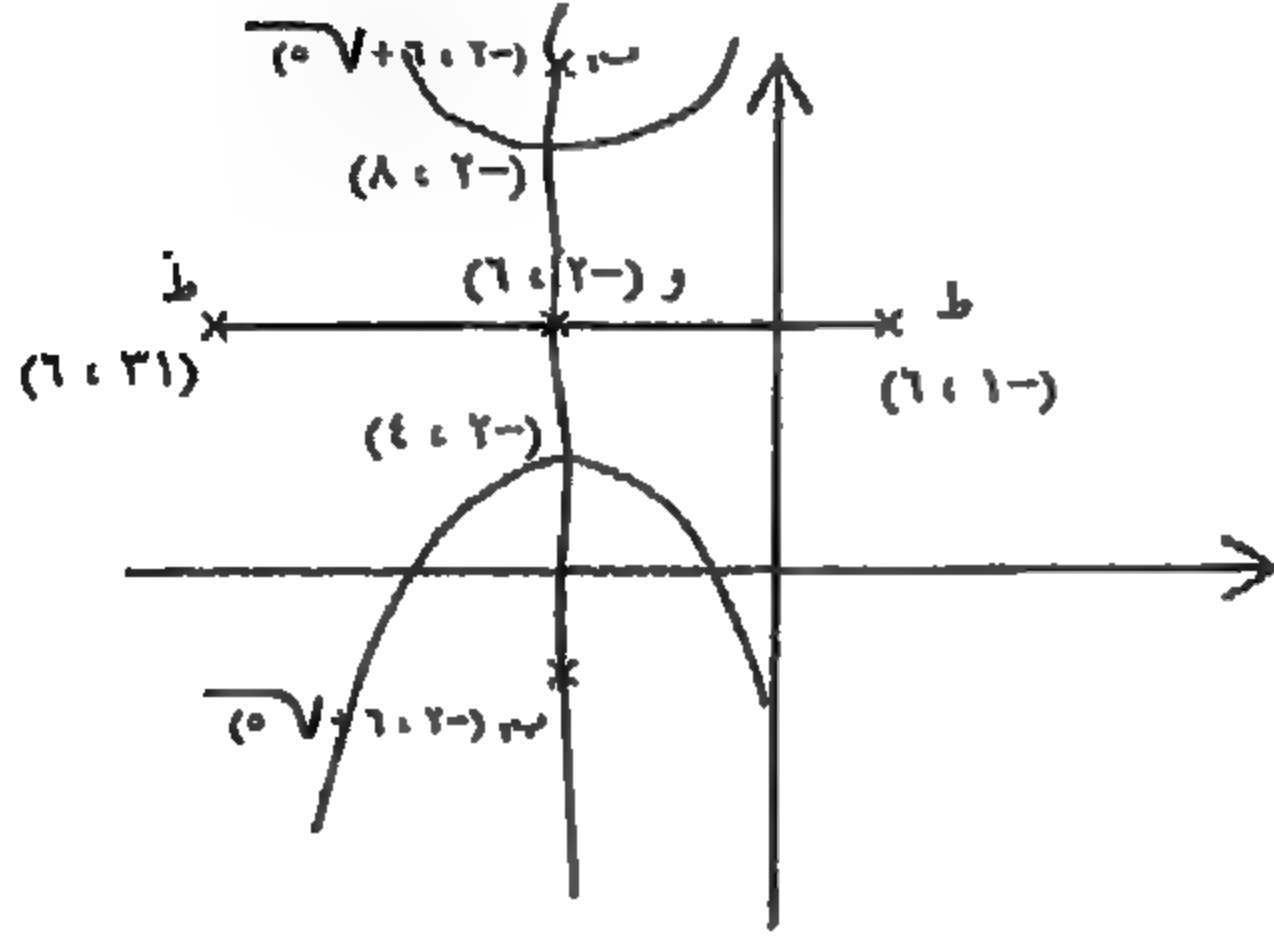
$$أ' = ٤ \leftarrow أ = ٢$$

$$ب' = ١ \leftarrow ب = ١$$

$$ج' = ٥ = ١ + ٤ = ب' + أ' = أ + ب$$

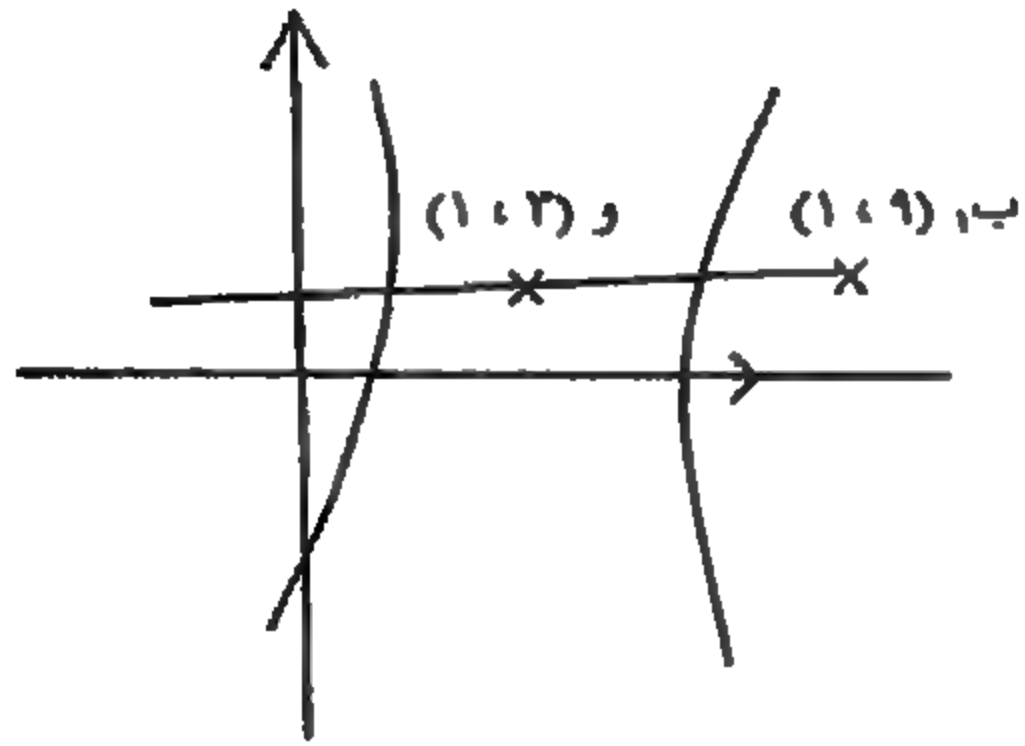
$$ج = \sqrt{٥}$$

بالبؤرتان  $(٥\sqrt{+٦}, ٢-)$  ،  $(٥\sqrt{-٦}, ٢-)$



مثال:

أوجد معادلة القطع الزائد الذي مركزه و  $(٣, ١)$  واحدى بؤرتيه ب  $(٩, ٢)$   
وطول محوره القاطع  $٢ أ = ٨$



الرسم يقول بأنه سيني

معادلته القياسية:

$$١ = \frac{٢(ص-هـ)}{ب'} - \frac{٢(د-س)}{أ'}$$

$$أ' = ٨ ، أ = ٤$$

لكن ج = البعد بين المركز واحدى بؤرتيه =  $٩ - ٣ = ٦$

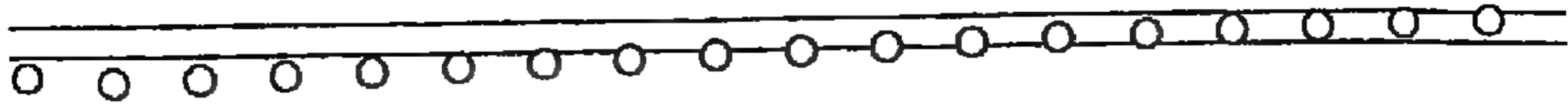
$$ج' = ٦ = أ' + ب'$$

$$٦(٦) = ١٦ + ب'$$

$$ب' = ٢٠ = ١٦ - ٣٦$$

$$ب = \sqrt{٢٠} = \sqrt{٥٧٢}$$

### المقاطع المخروطية



فالمعادلة:

$$١ = \frac{(ص-١)^2}{٢٠} - \frac{(س-٣)^2}{١٦}$$

الصورة القياسية

وأما الصورة العامة بعد التخلص من الكسر

$$٥س^٢ - ٤ص^٢ - ٣٠س + ٨ص - ٣٩ = \text{صفر}$$

والآن جاء وقت التمييز بين المقاطع المخروطية بناء على معادلات منحنياتها العامة:

$$\text{من المعلوم أن المعادلة: } أ س^٢ + ب ص^٢ + ج س + د ص + هـ = \text{صفر}$$

معادلة تربيعية من الدرجة الثانية بمتغيرين حيث: أ ، ب ، ج ، د ، هـ أعداد حقيقية

و: أ ، ب لا يساويان الصفر معاً

فأما أ = صفر أو ب = صفر وليس الاثنان معاً وإلا أصبحت المعادلة أعلاه

معادلة خط مستقيم ج س + د ص + هـ = صفر

فعند استبدال الأعداد الثوابت (معاملات هنا) أ ، ب ، ج ، د ، هـ بأعداد

حقيقية فإن المعادلة أعلاه تصبح معادلة قطع مكافئ أو ناقص أو دائرة أو زائد

وبيان ذلك بتحويل الصورة العامة الى قياسية بواسطة اكمال المربع أو المربعين.

مثال:

عيّن نوع القطع المخروطي الممثل بالمعادلة:

$$١٦س^٢ + ٩ص^٢ + ٦٤س - ١٨ص - ٧١ = \text{صفر} \quad \text{وارسم منحناه.}$$

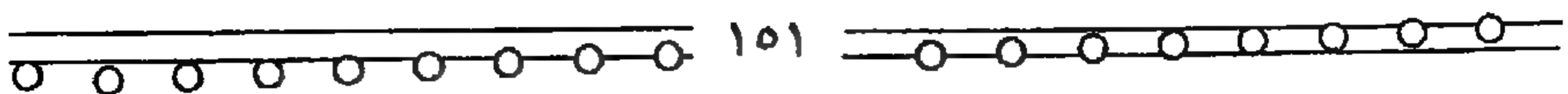
بواسطة اكمال المربعين بالنسبة للمتغيرين س ، ص كلاً على انفراد:

$$(١٦س^٢ + ٦٤س) + (٩ص^٢ - ١٨ص) = ٧١$$

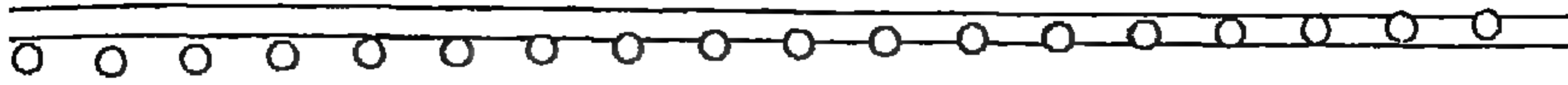
وبإخراج العامل المشترك ١٦ من الأول، ٩ من الثاني لتصبح س<sup>٢</sup> ، ص<sup>٢</sup> لهما معامل

الوحدة هكذا:

$$١٦(س^٢ + ٤س) + ٩(ص^٢ - ٢ص) = ٧١$$



### المقطع المخروطية



وبإضافة مربع نصف معامل كل من المتغيرين  $s$  ،  $v$  الى طرفي المعادلة كما يلي:

$$16(s^2 + 4s + 1) + 9(v^2 - 2v + 1) = 144$$

$$16(s^2 + 4s + 1) + 9(v^2 - 2v + 1) = 144$$

$$\frac{144}{144} = \frac{16(s^2 + 4s + 1)}{144} + \frac{9(v^2 - 2v + 1)}{144}$$

$$1 = \frac{16(s^2 + 4s + 1)}{144} + \frac{9(v^2 - 2v + 1)}{144} \therefore$$

فالمقطع ناقص ومركزه  $(-2, -1)$

$$ج = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$$

بؤرتاه:  $ب_1(-2, -1 + \sqrt{7})$  ،  $ب_2(-2, -1 - \sqrt{7})$

واختلافه المركزي:

$$هـ = \frac{ج}{ا} = \frac{\sqrt{7}}{4} > 1 \quad \text{لأن } 4 > \sqrt{7}$$

مثال:

عين نوع القطع المخروطي الممثل بالمعادلة:

$$s^2 + 8s + 22 = 2v^2 \quad \text{وارسم منحناه.}$$

بواسطة اكمال المربع:

$$s^2 + 8s + 22 = 2v^2$$

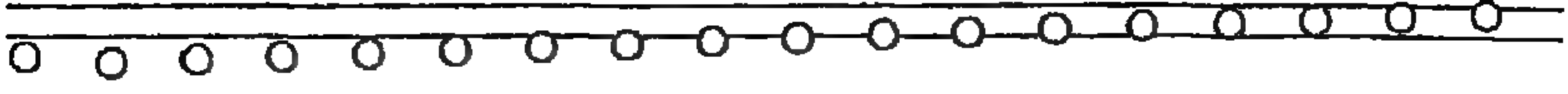
بإضافة مربع نصف معامل  $s$

$$(s^2 + 8s + 16) + 22 - 16 = 2v^2$$

$$(s + 4)^2 - 2 = 2v^2$$



## المقطع المخروطية



$$(س + ٤)^2 = ٢ ص - ٦$$

$$(س + ٤)^2 = ٢ (ص - ٣)$$

انه قطع مكافئ صادي مفتوح للأعلى.

رأسه و  $(٣ ، ٤ -)$

معادلته القياسية:

$$(س + د)^2 = ٤ ج (ص - هـ)$$

$$٤ ج = ٢$$

$$ج = \frac{١}{٢}$$

$$بؤرته (٣ ، ٤ -) = (-\frac{١}{٢} + ٣ ، ٤ -) = (-\frac{٧}{٢} ، ٤ -)$$

مثال:

عين نوع القطع المخروطي الممثل معادلته:

$$٤ ص^2 - ٩ س^2 - ١٦ ص = \text{صفر} \quad \text{وارسم منحناه}$$

$$(٤ ص^2 - ١٦ ص) - (٩ س^2 - ٠) = \text{صفر}$$

$$٤ (ص^2 - ٤ ص) - ٩ (س^2 - ٠) = \text{صفر}$$

باضافة مربع نصف معامل س ، ص للطرفين:

$$٤ (ص^2 - ٤ ص + ٢) - ٩ (س^2 - ٠) = \text{صفر} + ٤ (٢)$$

للمتغير س

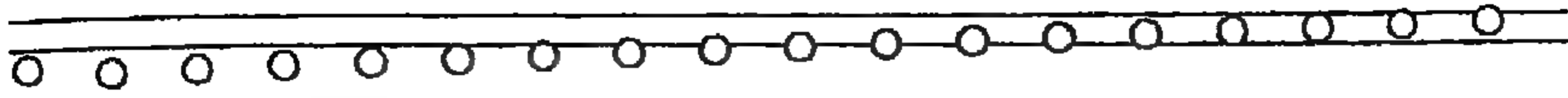
$$\frac{٤ (ص - ٢)^2}{١٦} - \frac{٩ س^2}{١٦} = \frac{١٦}{١٦}$$

نجعل الطرف الأيسر وحدة واحدة:

$$١ = \frac{٩ (ص - ٢)^2}{٤} - \frac{٩ س^2}{١٦}$$

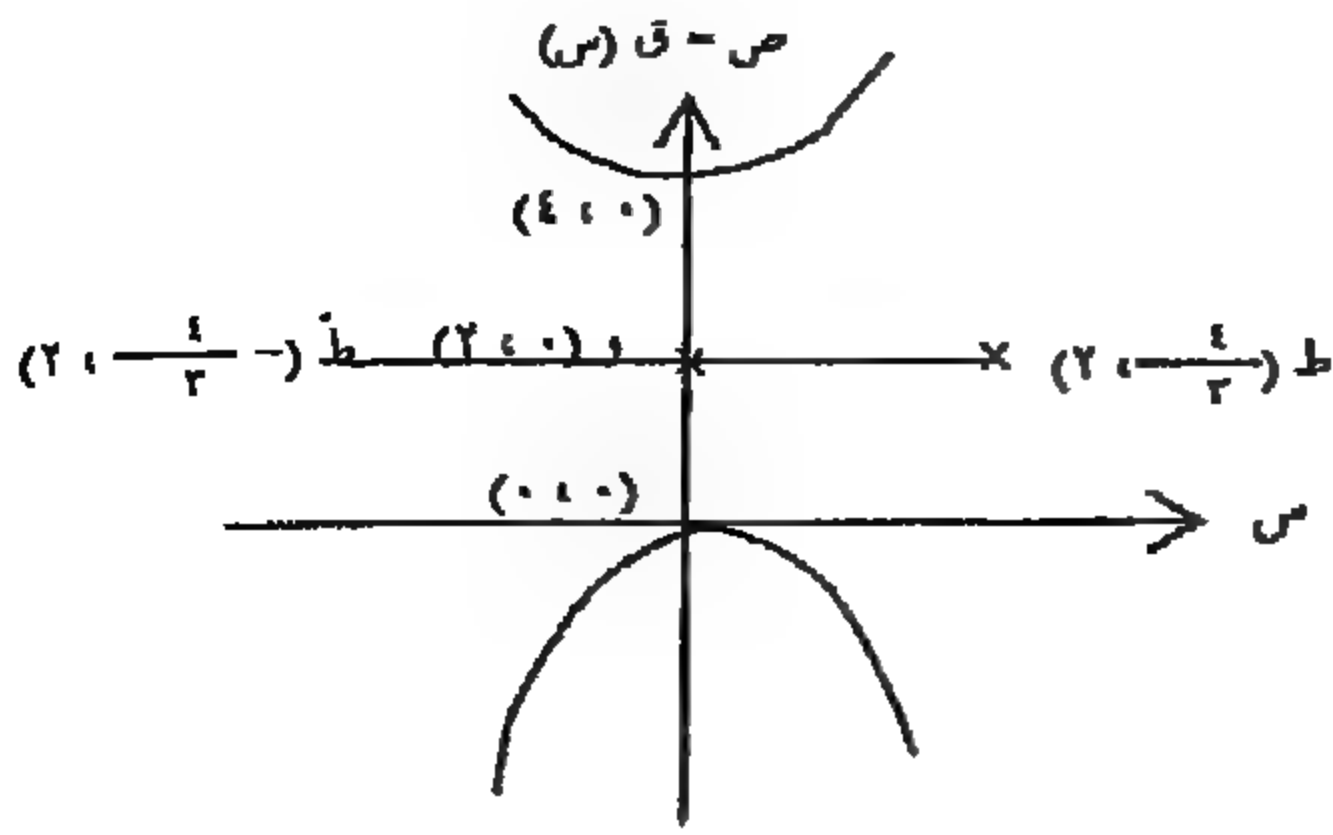


## المقطع المخروطية



انه قطع زائد صادي

مركزه و (2, 0)



$$2 = أ \quad \leftarrow \quad 4 = 2^2$$

$$\frac{4}{3} = ب \quad \leftarrow \quad \frac{16}{9} = 2^2$$

$$\frac{\sqrt{13} \sqrt{2}}{3} = ج \quad \leftarrow \quad \frac{52}{9} = \frac{16 + 36}{9} = \frac{16}{9} + 4 = 2^2 + 2^2 = 2^2 ج$$

$$\text{بؤرتاه: ب, } \left( \frac{\sqrt{13} \sqrt{2}}{3} + 2, 0 \right), \text{ ب, } \left( \frac{\sqrt{13} \sqrt{2}}{3} - 2, 0 \right)$$

مثال:

عين نوع القطع المكافئ الممثل بالمعادلة:

$$س^2 + ص^2 + 6س - 2ص - 5 = 0$$

باكمال المربع:

$$0 = (س^2 + 6س) + (ص^2 - 2ص)$$

بإضافة مربع نصف معامل س، ص الى الطرفين:

$$س^2 + 6س + 9 + 0 = (س^2 + 6س + 9) + (ص^2 - 2ص)$$

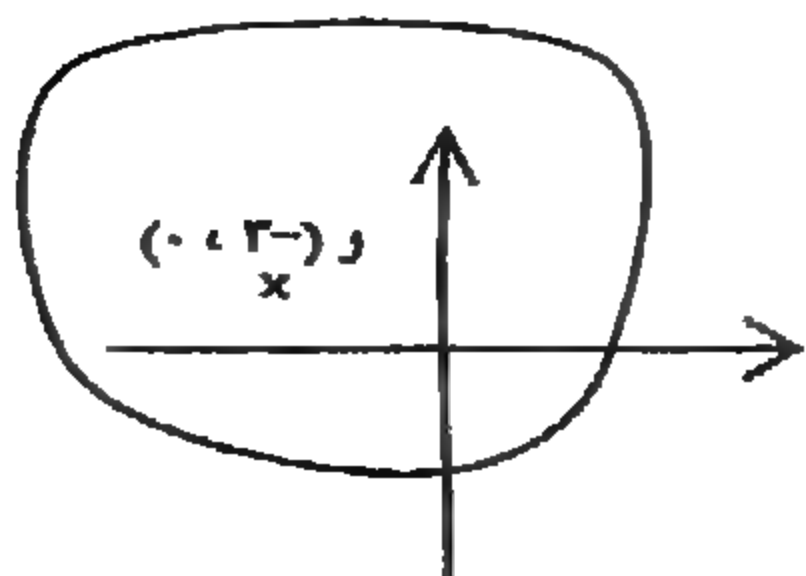
$$1 + 9 + 0 = (س + 3)^2 + (ص^2 - 2ص)$$

$$10 = (س + 3)^2 + (ص^2 - 2ص)$$

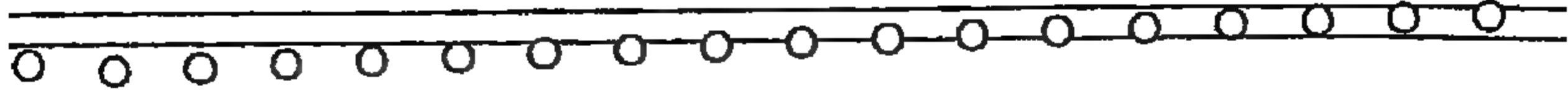
$$1 = \frac{(س + 3)^2}{10} + \frac{(ص^2 - 2ص)}{10} \quad \text{أو}$$

فهي معادلة دائرة نصف قطرها  $\sqrt{10}$  لأن  $2^2 = 4$  نق = نق

ومركزها (-3, 1)



### المقطع المخروطية



وبعد حل الأمثلة السابقة المنوعة وأمثالها يمكن ملاحظة ما يلي وعلى المعادلة العامة للمقطع المخروطية لاستنتاج نوع القطع المخروطي قبل تحويلها الى الصورة القياسية:

$$\text{بما أن } A^2 S^2 + B^2 V^2 + C S + D V + H = \text{صفر}$$

فإن التركيز سينصب على المعاملين  $A$  ،  $B$  أكثر من غيرهما كونهما بالذات القادرين على تحديد نوع منحنى القطع المخروطي كما يلي بعد الأمثلة السابقة:

(i) عندما يكون أحد المعاملين  $A$  ،  $B$  صفراً فإن  $A \times B = \text{صفر وليس الاثنان معاً}$

$$\text{أي أن } A = \text{صفر} ، B \neq \text{صفر}$$

$$\text{أو } A \neq \text{صفر} ، B = \text{صفر}$$

فالمعادلة لقطع مكافئ:

مثال:

$$S^2 + 4S - V + 1 = \text{صفر} \quad \text{قطع مكافئ سيني}$$

$$\text{وكذلك } V^2 + V - S + 1 = \text{صفر} \quad \text{قطع مكافئ صادي.}$$

(ii) إذا اتفقت اشارتا  $A$  ،  $B$  وكانتا موجبتين أو سالبتين معاً، أي أن  $A \times B < \text{صفر}$  دائماً فإن المعادلة لقطع ناقص كونها تحوي  $S^2$  ،  $V^2$  وينفس الإشارة والحالة خاصة إذا كان  $A = B$  فالمعادلة لدائرة.

مثال:

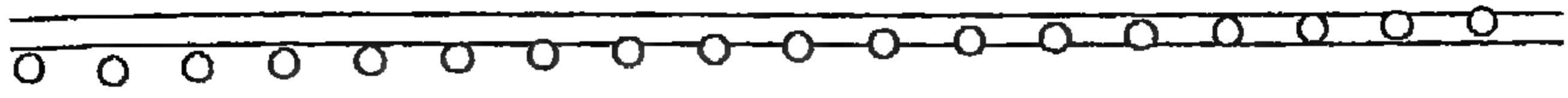
$$25S^2 + 36V^2 = 1 \quad \text{قطع ناقص}$$

$$\text{وكذلك } 4V + 24S - 36 - 4S^2 - V^2 = \text{صفر} \quad \text{قطع ناقص.}$$

$$5S^2 + 5V^2 = 25 \quad \text{دائرة}$$



### المقاطع المخروطية



(iii) إذا اختلفت اشارتا أ ، ب أي اذا كان أ × ب > صفر دائماً، تصبح المعادلة لقطع زائد:

مثال:

$$\text{ص}^2 - \text{أ}^2 \text{س}^2 - 8 \text{ص} + 36 \text{س} - 29 = \text{صفر} \quad \text{زائد}$$

$$25 \text{س}^2 - 4 \text{ص}^2 - 250 \text{س} - 16 \text{ص} + 541 = \text{صفر} \quad \text{زائد}$$

وباختصار شديد:

إذا كان أ ب < صفر قطع ناقص (يحتوي س<sup>2</sup>، ص<sup>2</sup> نفس الإشارة ، أ س<sup>2</sup> + ب ص<sup>2</sup> المميز

وإذا كان أ ب < صفر و أ = ب دائرة (يحتوي س<sup>2</sup>، ص<sup>2</sup> نفس الإشارة ١ س<sup>2</sup> + ص<sup>2</sup> المميز

وإذا كان أ ب > صفر قطع زائد (يحتوي س<sup>2</sup>، ص<sup>2</sup> بإشارتين مختلفتين أ س<sup>2</sup> - ب ص<sup>2</sup> المميز

أما اذا ظهر س<sup>2</sup> ، أي أ ± صفر واختص ص<sup>2</sup> أي ب = صفر

أو العكس ← قطع مكافئ مميزه

$$\text{أ} \text{س}^2 \text{ أو } \text{ب} \text{ص}^2$$

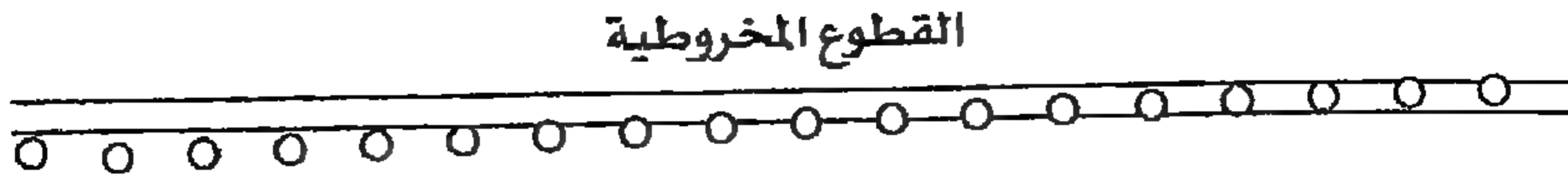
ولا تنسى أخيراً:

$$\text{ص} = \text{أ} \text{س}^2 + \text{ب} \text{ص} + \text{ج} \quad \leftarrow \text{قطع مكافئ صادي}$$

$$\text{س} = \text{أ} \text{ص}^2 + \text{ب} \text{ص} + \text{ج} \quad \leftarrow \text{قطع مكافئ ، سيني}$$

هاتان المعادلتان تخصان القطع المكافئ فقط.





(٢٣ - ٥) أمثلة محلولة على القطوع المخروطية

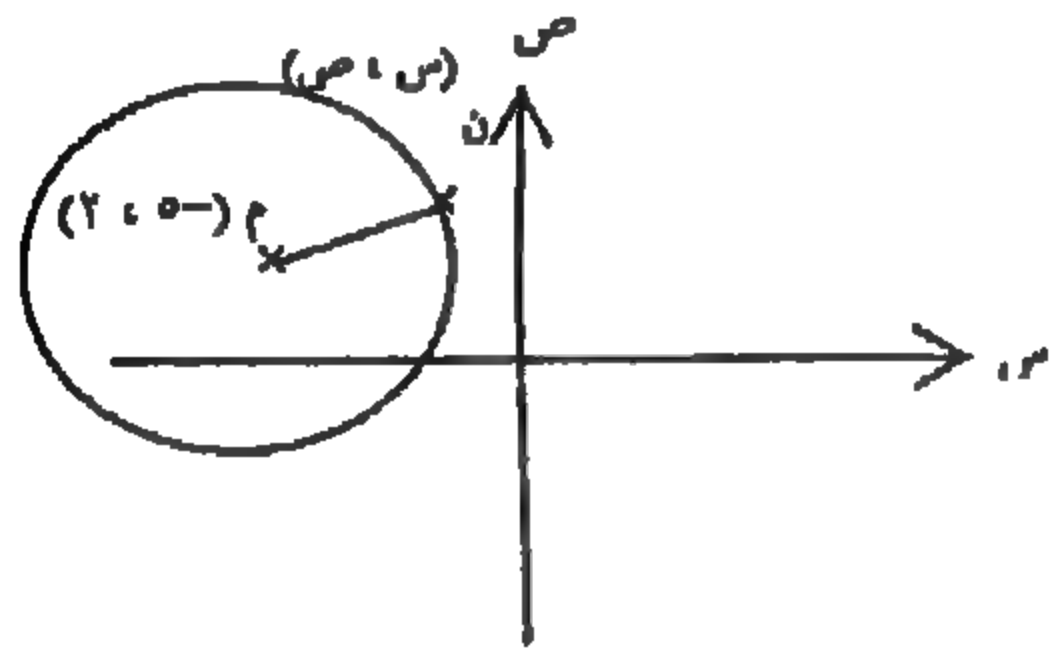
مثال (١) :

ما المحل الهندسي وما معادلته لنقطة متحركة مثل ن (س ، ص) حسب كل شرط من الشروط التالية:

- (i) بعدها عن النقطة م (- ٥ ، ٢) يساوي ٤ وحدات.
- (ii) بعدها عن المستقيم ٤ ص = ٣ س + ٥ يساوي ١ وحدة وتتم أثناء حركتها بنقطة الأصل و (٠ ، ٠)
- (iii) بعدها عن النقطة ب (٣ ، - ١) يساوي بعدها عن المستقيم س = ١ دائماً.

الحل:

بمناقشة المحال الهندسية نستخدم قوانين المسافة والرسم للتوضيح هكذا:



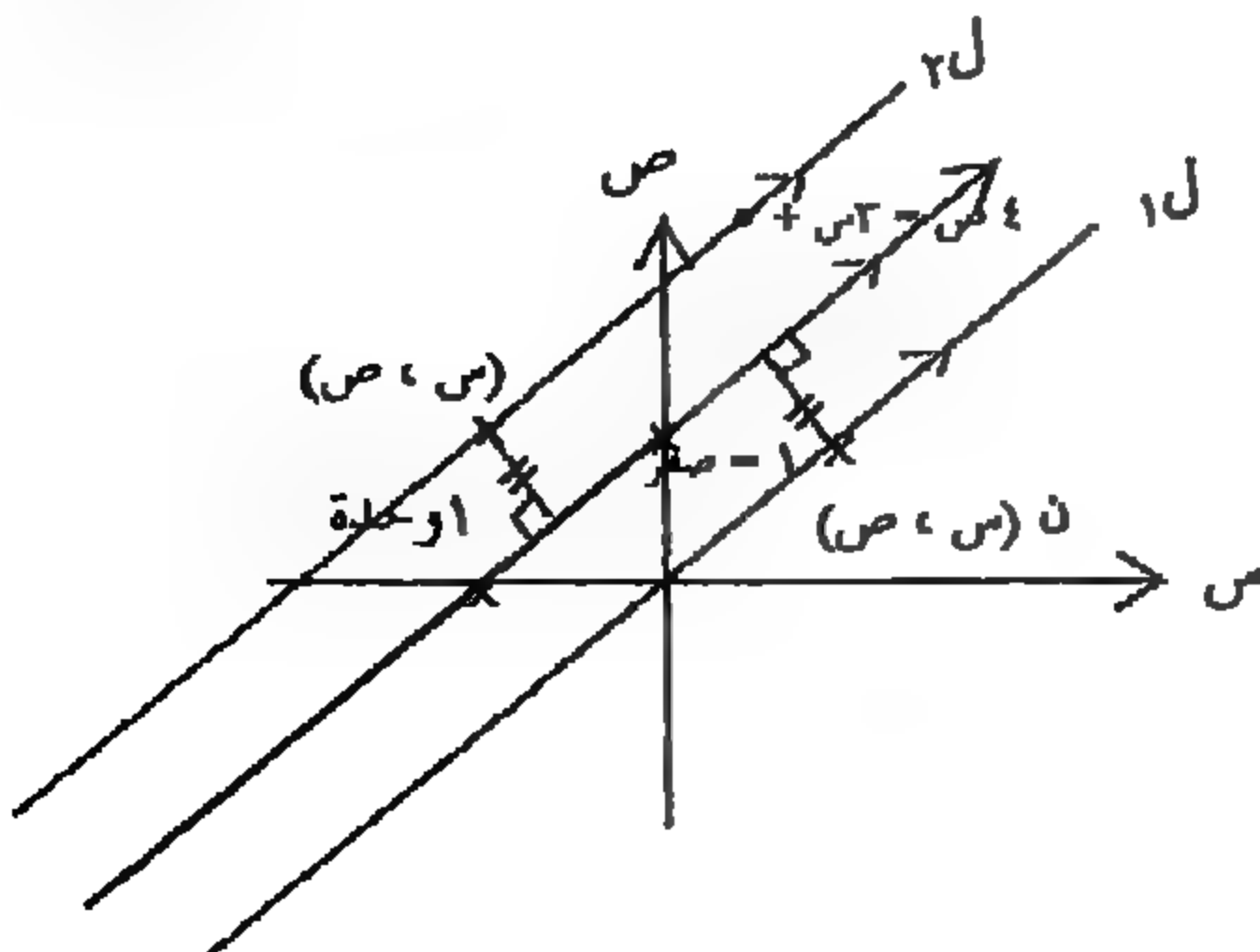
$$(i) \quad \sqrt{(v - 2)^2 + (s + 5)^2} = 4$$

$$\therefore \sqrt{(v - 2)^2 + (s + 5)^2} = 4$$

وبعد التربيع

$$16 = (v - 2)^2 + (s + 5)^2$$

وهذه الصورة القياسية لمعادلة الدائرة التي مركزها م (- ٥ ، ٢) ونصف قطرها ٤ وحدات.



فالمحل الهندسي هو دائرة.

(ii) نرسم المستقيم ٤ ص = ٣ س + ٥

س	٠	-	٣
ص	٤	+	٥



### القطوع المخروطية



الصورة العامة للمستقيم على الشكل أ س + ب ص + ج = صفر

أي: - ٣ س + ٤ ص - ٥ = صفر

المحل الهندسي للنقطة ن (س ، ص) والتي تبعد ١ وحدة عن المستقيم

- ٣ س + ٤ ص - ٥ = صفر هو مستقيم و "واحد من اثنين في الرسم"

ل١ أول

ومعادلته:

$$\left| \frac{أ س + ب ص + ج}{\sqrt{ب^2 + أ^2}} \right| = ع$$

$$\left| \frac{- ٣ س + ٤ ص - ٥}{\sqrt{١٦ + ٩}} \right| = ١ \therefore$$

$$\left| \frac{- ٣ س + ٤ ص - ٥}{٥} \right| = ١ \therefore$$

$$\therefore - ٣ س + ٤ ص - ٥ = ٥$$

وبعد فك القيمة المطلقة

$$\therefore - ٣ س + ٤ ص - ٥ = ٥ \quad \text{أو} \quad - ٣ س + ٤ ص - ٥ = - ٥$$

$$- ٣ س + ٤ ص - ٥ = ١٠ \quad \text{أو} \quad ٤ ص = ٣ س + ١٥ \rightarrow ل$$

$$\text{أي } ٤ ص = ٣ س + ١٠ \rightarrow ل$$

وعندما نحقق نقطة الأصل في المعادلتين نجد:

$$٤ (٠) = ٣ (٠) + ١٠ \rightarrow \text{صفر} = \text{صفر} \quad \text{نعم}$$

$$٤ (٠) = ٣ (٠) + ١٠ \rightarrow \text{صفر} \neq ١٠ \quad \text{لا}$$

$\therefore$  المحل الهندسي ل١ ومعادلته ٤ ص = ٣ س

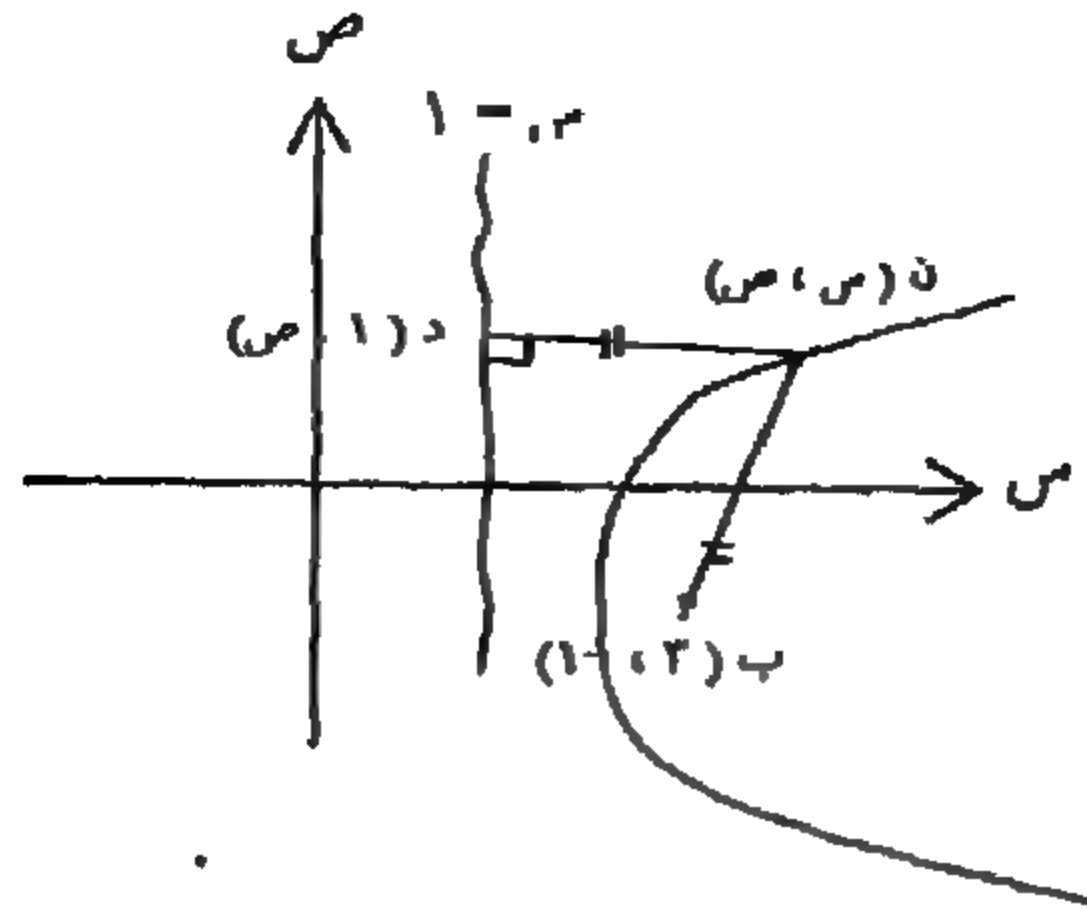


## القطع المخروطية



(iii) الشكل يوضح المحل الهندسي

وهو قطع مكافئ



معادلته:

$$ن ب = ن د$$

$$\sqrt{(ص - 1)^2 + (1 - 1)^2} = \sqrt{(ص - 1)^2 + (3 - 1)^2}$$

$$(ص - 1)^2 = (ص + 1)^2 + (3 - 1)^2$$

$$ص^2 - 2ص + 1 = ص^2 + 2ص + 1 + 4$$

$$ص^2 + 2ص = ص^2 - 2ص - 4$$

$$ص^2 + 2ص = 4 - 2ص - 4$$

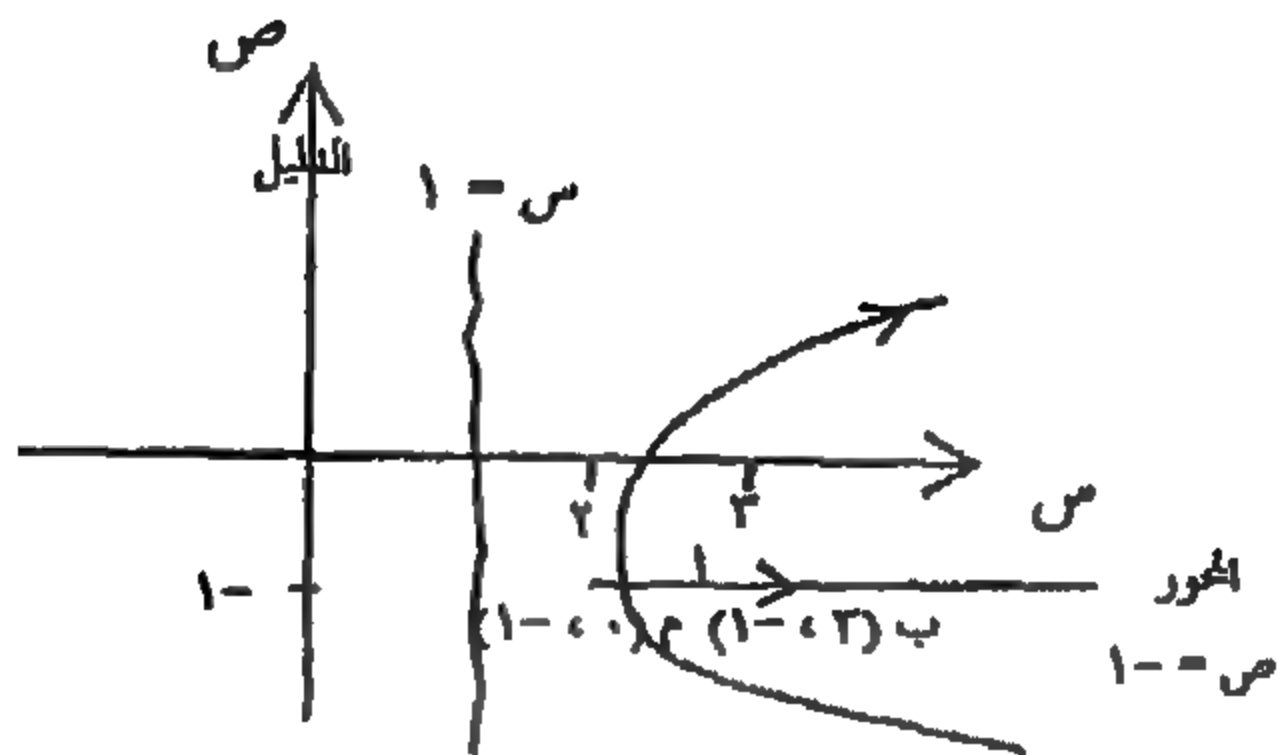
$$ص^2 + 2ص + 4 = 4 - 2ص - 4$$

$$(ص + 1)^2 = 4 - 2ص - 4$$

$$\therefore (ص - 1)^2 = 4(ص - 1)$$

$$حيث ج = 1$$

$$رأسه م (1, 2)$$



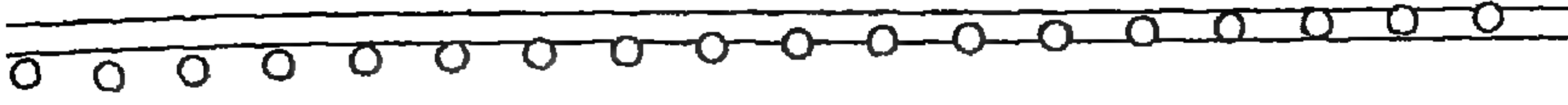
كما في الشكل المجاور.

مثال (2):

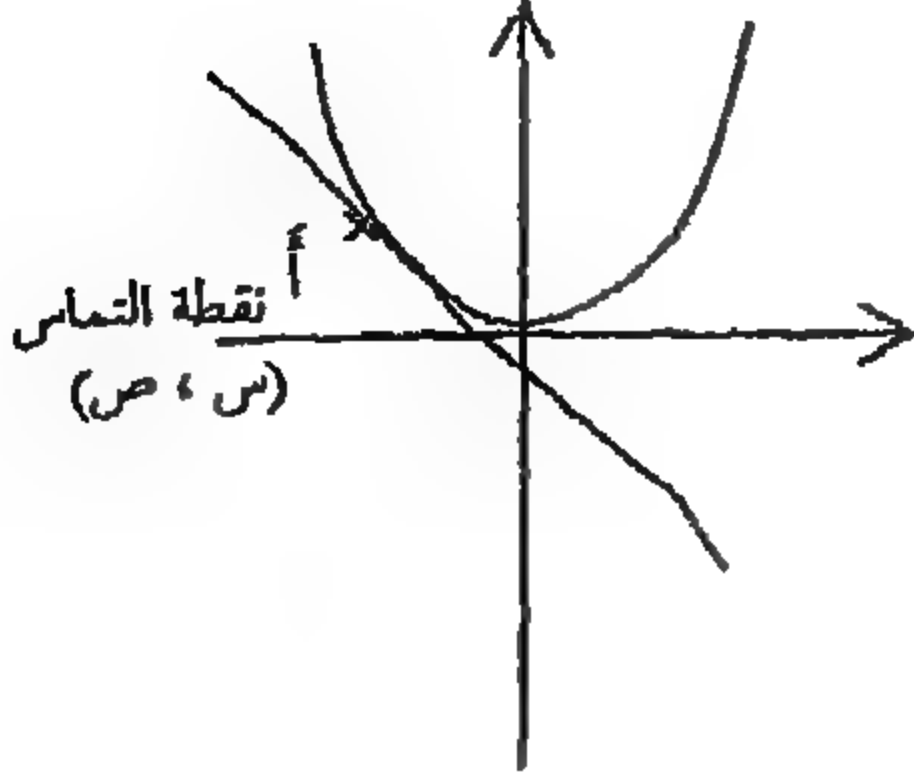
ما قيمة ج ليكون المستقيم س + ص = ج

مماساً للقطع المكافئ س<sup>2</sup> = 2ص ؟

## القطوع المخروطية



الحل:



نجد أولاً أحداثيات نقطة التماس من العلاقة:

$$م_{التماس} = م_{المنحنى}$$

$$م_{التماس}: 1 + \frac{دص}{دس} = صفر \quad \text{باشتقاق المعادلة } ص + س = ج$$

$$\therefore \frac{دص}{دس} = -1 \quad \text{ميل التماس:}$$

$$م_{المنحنى}: 2س = 2 \cdot \frac{دص}{دس} \quad \text{باشتقاق المعادلة } س^2 = 2ص$$

$$س = \frac{دص}{دس} = \frac{2س}{2} \quad \text{ميل المنحنى}$$

$$\therefore س = -1 \quad \text{الاحداثي السيني لنقطة التماس}$$

$$\text{ومنها: } ص = \frac{-(1)^2}{2} = -\frac{1}{2} \quad \text{عوضنا بـ } -1 \text{ في المعادلة } س^2 = 2ص$$

$$\therefore \text{نقطة التماس أ } (-1, -\frac{1}{2})$$

وبما أن نقطة التماس واقعة على المنحنى، والتماس معاً فإنها تحقق معادلة التماس كما يلي؟

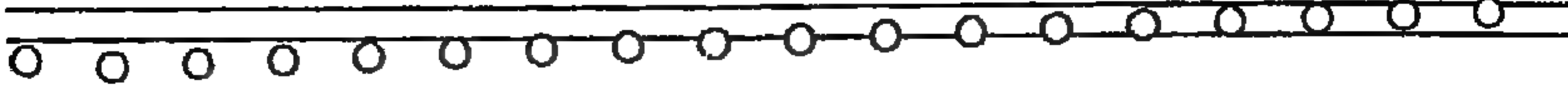
$$س + ص = ج$$

$$\therefore -1 - \frac{1}{2} = ج$$

$$\leftarrow ج = -\frac{3}{2}$$

$$\therefore \text{معادلة التماس تصبح: } س + ص = -\frac{3}{2}$$

### القطوع المخروطية



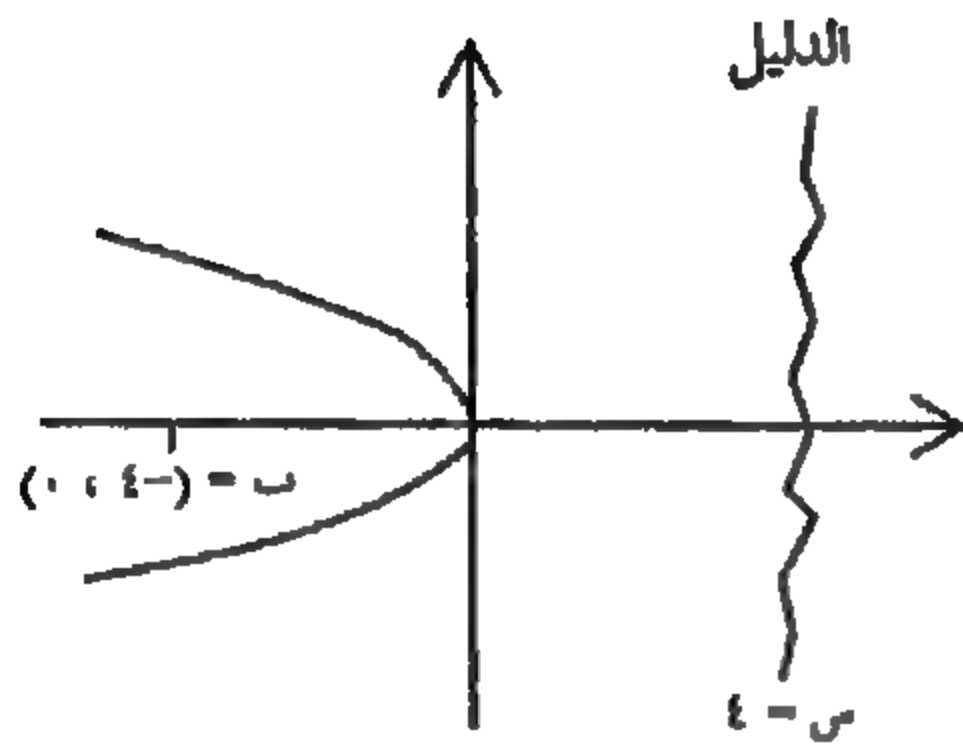
مثال (٣):

أوجد مكونات وعناصر القطع المكافئ الذي معادلته  $v^2 = -16s$  من

الحل:

انه سيني مفتوح لليسار ورأسه نقطة الأصل كما في الشكل.

معادلته القياس



$$v^2 = -4s$$

$$\text{لكن } v^2 = -16s$$

$$\therefore -4s = -16 \Rightarrow s = 4$$

فمناصره ومكوناته كما في موضحة على الشكل.

رأسه و (٠ ، ٠)

بؤرته ب (٠ ، ٤ -)

معادلة محوره  $v = 0$  كونه محور السينات

معادلة دليله  $s = 4$

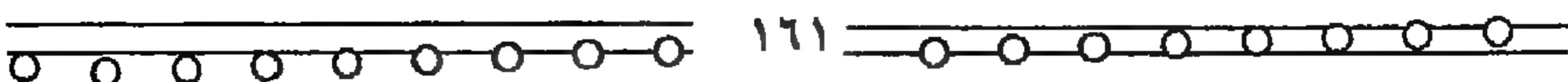
اختلافه المركزي  $e = 1$  دائماً.

مثال (٤):

اكتب معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته ب (٣ ، ٠) ومعادلة دليله  $v = 3$

الحل:

انه صادي مفتوح للأعلى ورأسه نقطة الأصل كما في الشكل.



## القطع المخروطية



معادلته القياسية:

$$س^2 = ٤ ج ص$$

لكن ج = البعد بين الرأس والبؤرة =

البعد بين الرأس والدليل = ٣

$$\therefore س^2 = (٤) (٣) ص$$

$$\therefore س^2 = ١٢ ص$$

=

مثال (٥):

أوجد عناصر ومكونات القطع المكافئ الذي معادلته:

$$س^2 + ٢ س - ٦ ص - ١٧ = صفر$$

الحل:

باكمال المربع:

$$س^2 + ٢ س = ٦ ص + ١٧$$

بإضافة مربع نصف معامل س للطرفين:

$$س^2 + ٢ س + ١ = ٦ ص + ١٧ + ١$$

$$(س + ١)^2 = ٦ ص + ١٨$$

$$\therefore (س + ١)^2 = ٦ (ص + ٣)$$

## القطوع المخروطية



أصبح واضح أنه صادي مفتوح للأعلى كما في الشكل:

ورأسه:

$$(س - د)^2 = ٤ ج (ص - هـ)$$

$$\therefore \text{رأسه م } (-١, ٣)$$

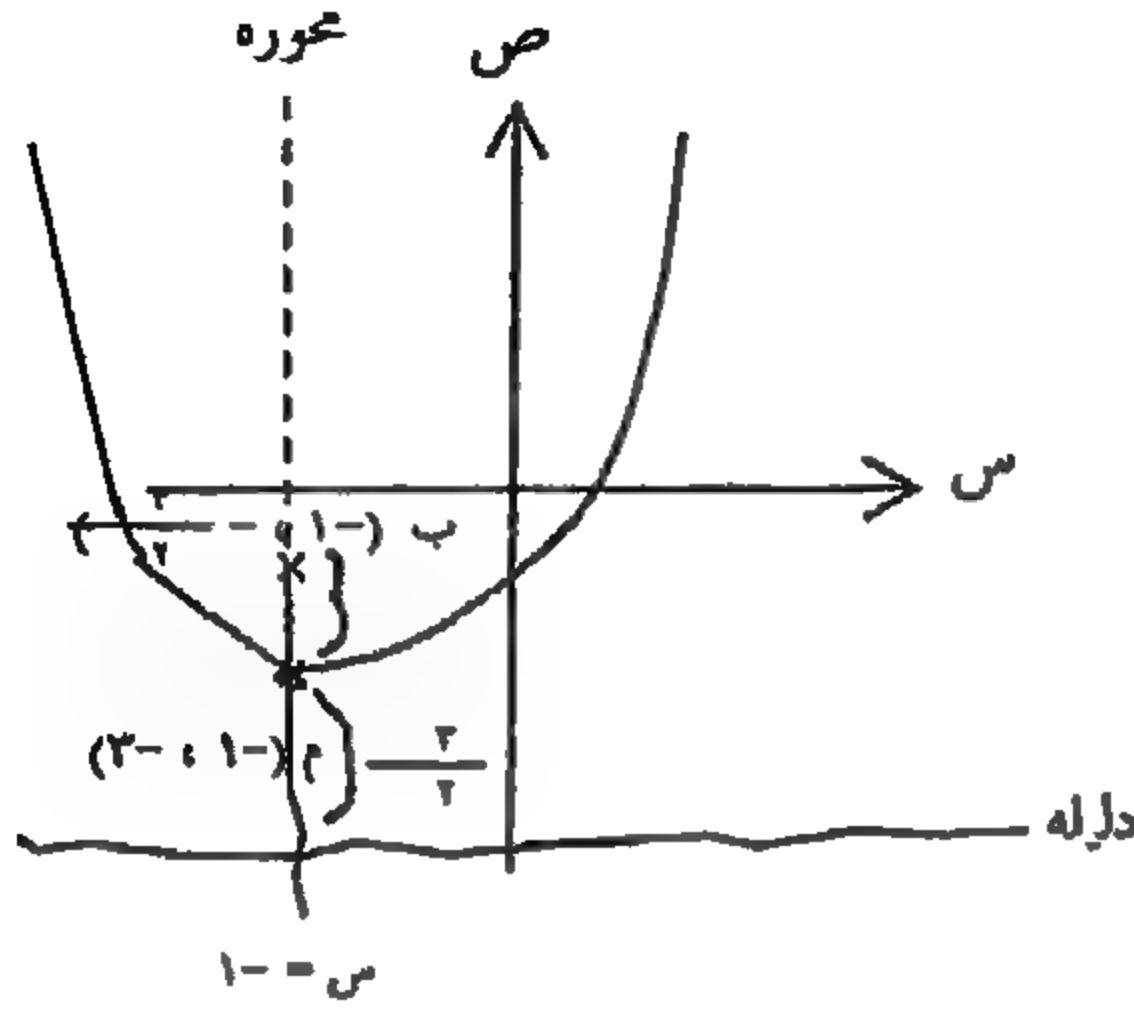
$$٤ ج = ٦ \leftarrow ج = \frac{٣}{٢} = ١,٥$$

$$\text{بؤرته ب } (-١, -\frac{٣}{٢})$$

$$\text{معادلة محوره س } = -١$$

$$\text{معادلة دليله ص } = -\frac{٩}{٢}$$

$$\text{واختلافه المركزي } = ١ \text{ دائماً}$$



مثال (٦):

اكتب معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته ب (٠, ٠)

$$\text{ومعادلة دليله س } = ٥$$

واضح من الرسم أنه سيني مفتوح لليسا

$$\text{رأسه م } (٠, \frac{٥}{٢})$$

معادلته القياسية:

$$(ص - هـ)^2 = ٤ ج (س - د)$$

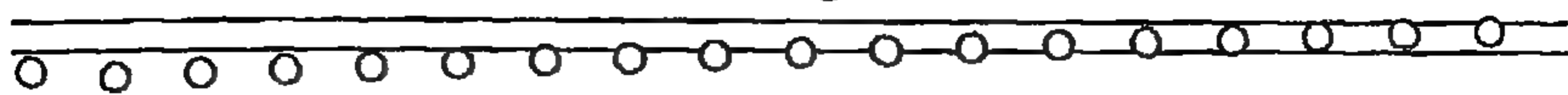
لكن ج = البعد بين الرأس والدليل = البعد بين البؤرة والرأس

$$\text{أي أن } ٢ ج = ٥ \leftarrow ج = \frac{٥}{٢}$$

$$\text{رأسه م } (٠, \frac{٥}{٢}) \text{ كما في الشكل}$$



### القطع المخروطية



$$\therefore \text{معادلته (ص - ١٠) (س - ٤) = ٢} \left( -\frac{٥}{٢} \right) \left( -\frac{٥}{٢} \right)$$

$$\text{ص}^2 - ١٠ \text{ص} + ٢٥ = ٠$$

$$\text{ص}^2 - ١٠ \text{ص} + ٢٥ = ٠$$

$$\text{أو } ١٠ \text{ص} - \text{ص}^2 = ٢٥$$

$$\therefore \text{س} = \frac{١}{١٠} + \text{ص}^2 + \frac{٢٥}{١٠} \quad \text{هذه الصورة العامة للمعادلة}$$

$$\text{وبالشكل } \text{س} = \text{أ} + \text{ص}^2 + \text{ب} + \text{ج}$$

$$\text{لاحظ أنه مفتوح ليسار كون } \frac{١}{١٠} = - \text{سالب}$$

مثال (٧):

اكتب معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه ب<sub>١</sub> (٢ ، -١) ، ب<sub>٢</sub> (٢ ، ٧)

وطول محوره الأكبر = ١٢

صادي كما هو واضح بالشكل

معادلته القياسية:

$$١ = \frac{(ص - هـ)^2}{أ^2} + \frac{(س - د)^2}{ب^2}$$

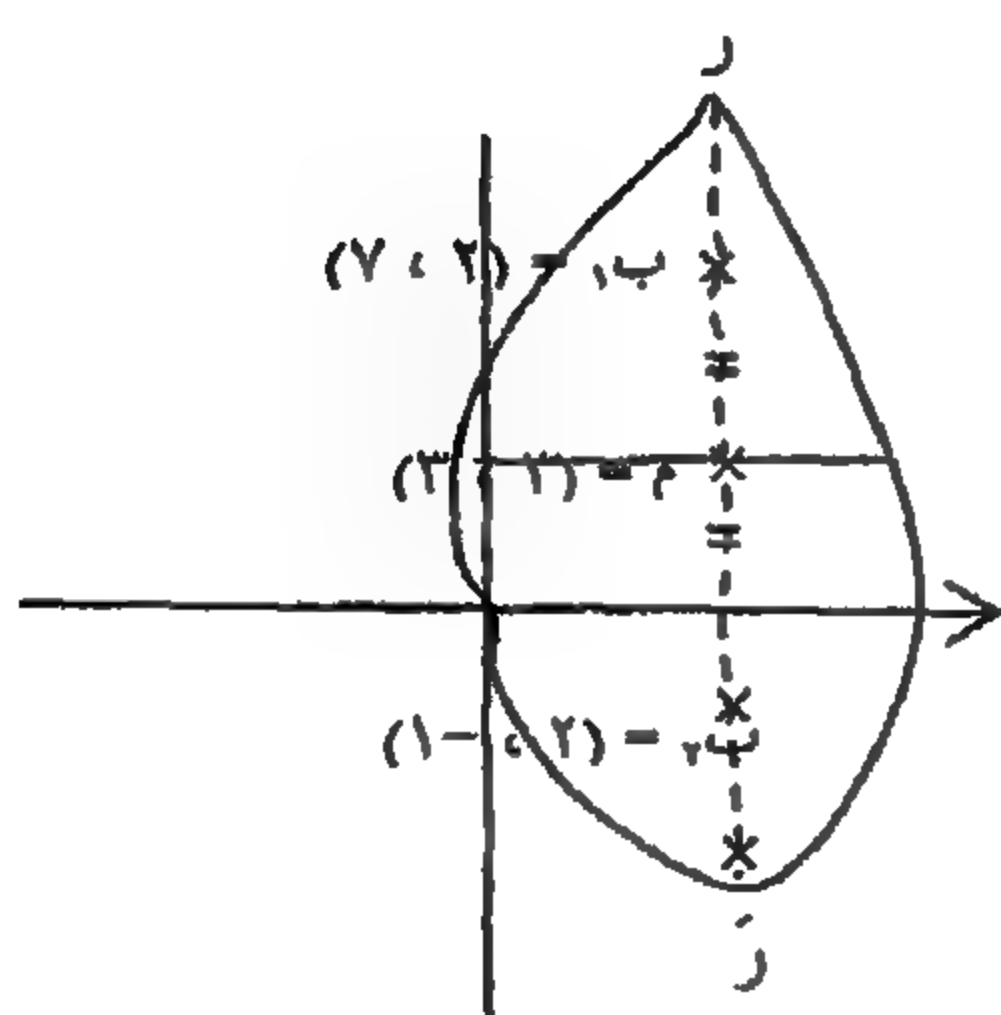
وبما أن ب<sub>١</sub> ب<sub>٢</sub> = ٢ ج البعد البؤري

$$\text{طول ب}^1 \text{ ب}^2 = ٧ - (-١) = ٨$$

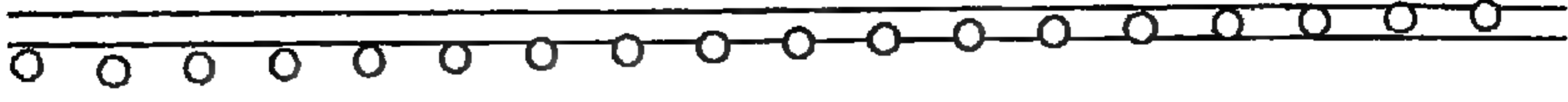
$$\therefore ٨ = ٢ ج$$

$$ج = ٤$$

$\therefore$  مركزه م (٢ ، ٣)



### القطوع المخروطية



المعادلة:

$$1 = \frac{{}^2(3 - \text{ص})}{{}^2\text{أ}} + \frac{{}^2(2 - \text{س})}{{}^2\text{ب}}$$

لكن  ${}^2\text{أ} = 12$  بالمعطيات  $\leftarrow {}^2\text{أ} = 6$

لكن  ${}^2\text{ج} = {}^2\text{أ} - {}^2\text{ب}$  كونه قطع ناقص

$$\therefore {}^2\text{ج} - {}^2(6) = {}^2(4)$$

$${}^2\text{ب} = 16 - 36 = 20$$

$\therefore$  المعادلة:

$$1 = \frac{{}^2(3 - \text{ص})}{36} + \frac{{}^2(2 - \text{س})}{20} \quad \text{الصورة القياسية}$$

وبعد التربيع والتبسيط تصبح معادلته العامة:

$$9\text{س}^2 + 5\text{ص}^2 - 36\text{س} - 30\text{ص} - 99 = 0 \quad \text{صفر}$$

مثال (٨):

أوجد مكونات وعناصر القطع الناقص الذي معادلته:

$$25 = {}^2(3 - \text{ص}) + {}^2(1 + \text{س})$$

الحل:

نبسط المعادلة لتصبح بالشكل:

$$25 = {}^2(3 - \text{ص}) + {}^2(1 + \text{س})$$

$$1 = \frac{{}^2(3 - \text{ص})}{1} + \frac{{}^2(1 + \text{س})}{25}$$

معادلة قطع ناقص صادي





وعلى الصورة القياسية:

$$\frac{(ص-هـ)^2}{\alpha^2} + \frac{(س-د)^2}{\beta^2}$$

مركزه م (- ١ ، ٣)

$$\alpha^2 = 1 \leftarrow \alpha^2 = 1$$

$\alpha^2 = 1$  طول محوره الأكبر

$$\frac{1}{\beta^2} = \frac{1}{25} \leftarrow \frac{1}{\beta^2} = \frac{1}{5}$$

$\beta^2 = \frac{2}{5}$  طول محوره الأصغر

$$\frac{24}{25} = \frac{1}{25} - 1 = \alpha^2 - \beta^2 = \gamma^2$$

$$\frac{\sqrt{672}}{5} = \frac{\sqrt{24}}{5} = \gamma$$

الرأسين = ر (- ١ ، ٤) ، ر (- ١ ، ٢)

$$\frac{\sqrt{672}}{1} = \frac{\gamma}{1} = هـ \text{ اختلافه المركزي}$$

$$1 > \frac{4.898}{5} = \frac{(2.449)^2}{5} = \frac{\sqrt{672}}{5} =$$

مثال (٩):

إذا كانت النقطة ن (س ، ص) تتحرك في المستوى الديكارتي بحيث أن

$$س = ٢ + ٢ جا هـ ، ص = ٣ + ٥ جتا هـ \text{ حيث هـ زاوية متغيرة.}$$

يُبين أن النقطة ن تتحرك على محيط دائرة وأوجد مركز ونصف هذه

الدائرة.

### القطوع المخروطية



الحل:

$$\text{بما أن } س = ٢ + ٣ \text{ جا هـ}$$

$$\text{ص} = ٥ + ٣ \text{ جتا هـ}$$

فإننا سنربط (س) بـ (ص) وذلك باستبعاد النسب المثلثية جا هـ ، جتا هـ كما يلي:

$$\text{س} = ٢ + ٣ \text{ جا هـ}$$

$$\therefore \text{س} - ٢ = ٣ \text{ جا هـ} \quad \text{ومنها:}$$

$$\text{جا هـ} = \frac{\text{س} - ٢}{٣} \quad (١)$$

$$\text{وكذلك ص} = ٥ + ٣ \text{ جتا هـ}$$

$$\therefore \text{ص} - ٥ = ٣ \text{ جتا هـ}$$

$$\text{ومنها جتا هـ} = \frac{\text{ص} - ٥}{٣} \quad (٢)$$

لكن جا<sup>٢</sup> هـ + جتا<sup>٢</sup> هـ = ١      متطابقة مثلثية

$$\therefore ١ = \left( \frac{\text{س} - ٢}{٣} \right)^2 + \left( \frac{\text{ص} - ٥}{٣} \right)^2$$

$$\{ ١ = \frac{٢(٥ - \text{ص})}{٩} + \frac{٢(٢ - \text{س})}{٩} \} \times ٩$$

$$٩ = ٢(٥ - \text{ص}) + ٢(٢ - \text{س})$$

وهذه صورة قياسية لمعادلة الدائرة التي مركزها م (٢ ، ٥)

ونصف قطرها نق  $\sqrt{٩} = ٣$  وحدات طولية

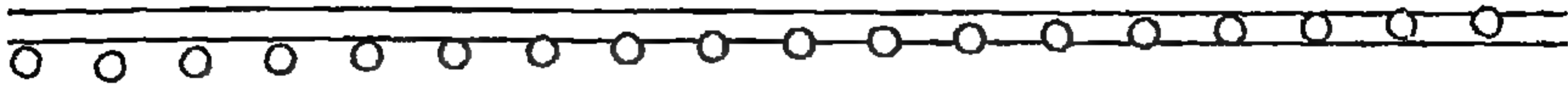
مثال (١٠):

ما احداثيات البؤرتين للقطع الزائد الذي معادلته:

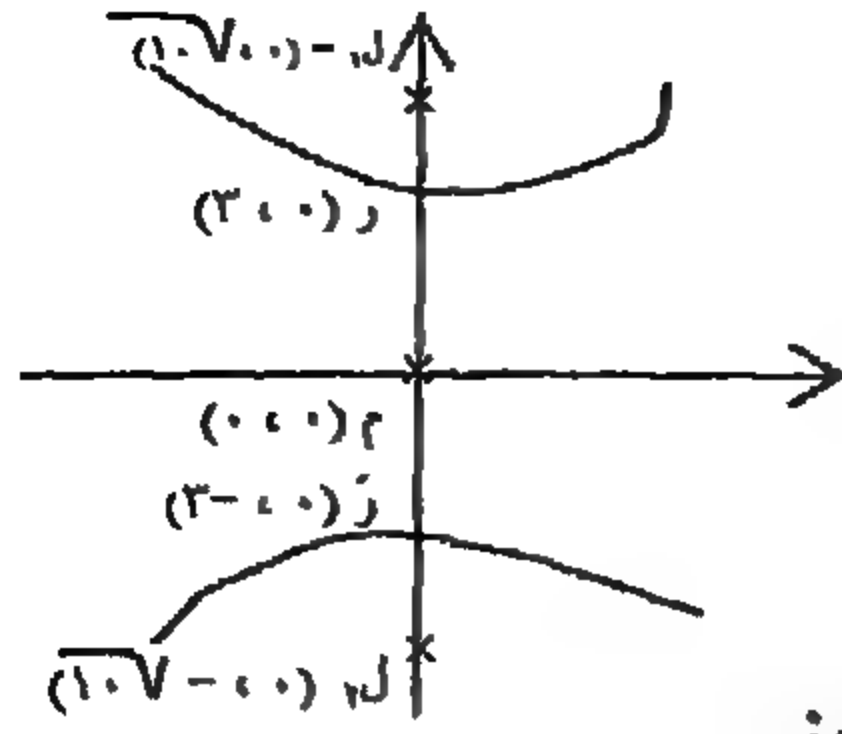
$$\text{ص}^2 - ٩ = ٩ \text{ س}^2$$



## انقطاع المخروطية



الحل:



نقسم المعادلة على ٩ هكذا:

$$1 = \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{1}$$

فهو صادي مركزه نقطة الأصل كما في الشكل:

معادلته القياسية:

$$1 = \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2}$$

$$a^2 = 9 \leftarrow a = 3 \leftarrow \text{رأسيه } (0, 3) \text{ و } (0, -3)$$

$$b^2 = 1 \leftarrow b = 1$$

$$\text{لكن ج}^2 = a^2 + b^2 = 9 + 1 = 10$$

$$\text{ج} = \sqrt{10}$$

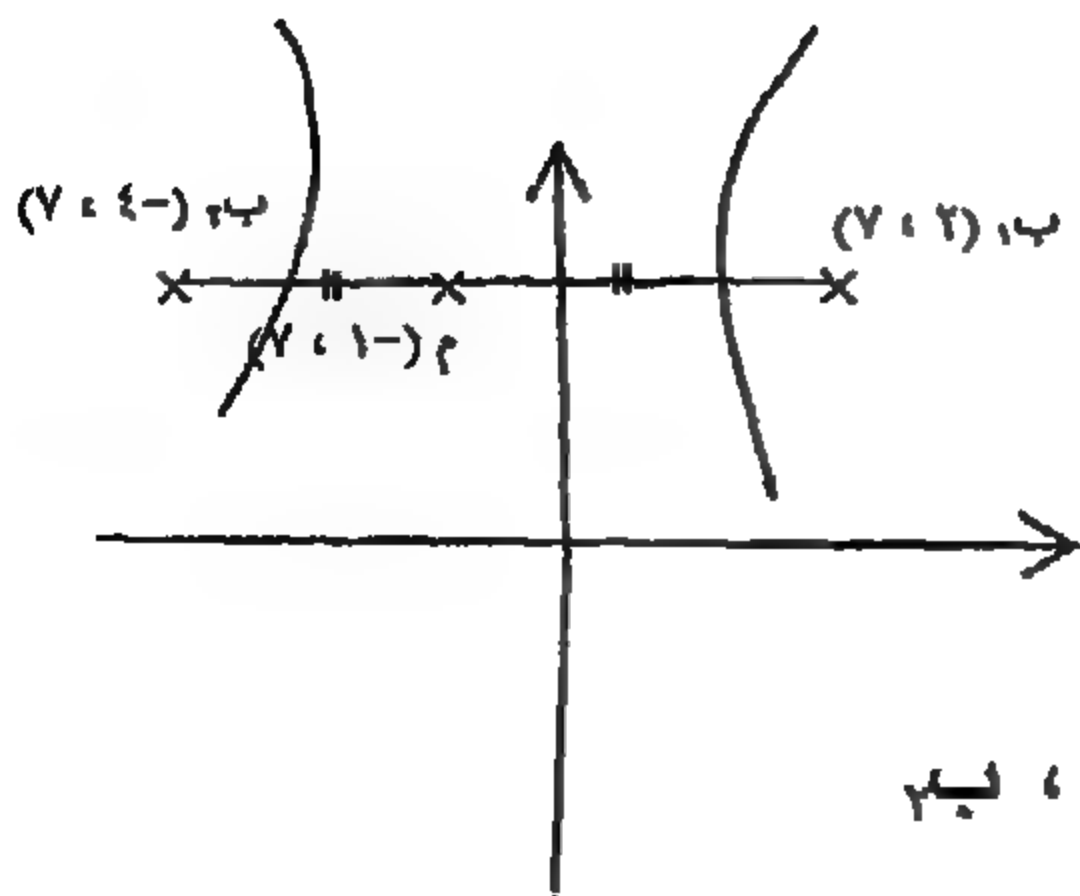
البؤرتان:  $(\sqrt{10}, 0)$  و  $(-\sqrt{10}, 0)$

مثال (١١):

اكتب معادلة القطع الزائد الذي اختلافه المركزي هـ =  $\frac{5}{3}$

واحداثيات بؤرتيه  $B_1(7, 2)$  و  $B_2(7, -4)$

الحل:

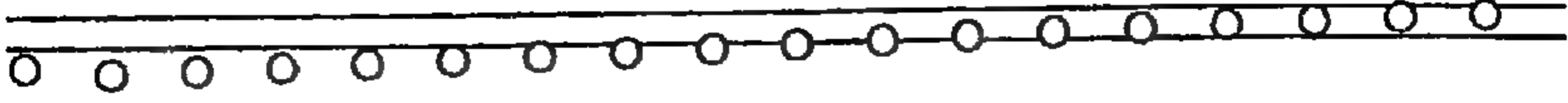


من الشكل الواضح أنه سيني

احداثيات مركزه م هي منتصف البعد البؤري  $B_1, B_2$

$$\therefore \text{م } (7, -1) \text{ وكذلك ج}^2 = 2^2 + (-4)^2 = 20 \leftarrow \text{ج} = \sqrt{20}$$

## القطوع المخروطية



بما أنه سيني فمعادلته القياسية:

$$1 = \frac{{}^2(ص-هـ)}{{}^2_ب} - \frac{{}^2(د-س)}{{}^2_أ}$$

$$1 = \frac{{}^2(٧-ص)}{{}^2_ب} - \frac{{}^2(١+س)}{{}^2_أ} \therefore$$

لكن اختلافه المركزي هـ =  $\frac{ج}{أ}$

وبما أن ج = ٣

$$\frac{٩}{٥} = أ \longleftarrow \frac{٣}{أ} = \frac{٥}{٣} \therefore$$

$$\frac{٨١}{٢٥} = {}^2_أ$$

وبما أن ج = ٣ =  ${}^2_أ + {}^2_ب$  قطع زائد

$$\frac{٨١ - ٢٢٥}{٢٥} = \frac{٨١}{٢٥} - ٩ = {}^2_ب \longleftarrow {}^2_ب + \frac{٨١}{٢٥} = {}^2(٣) \therefore$$

$$\frac{١٤٤}{٢٥} = {}^2_ب \therefore$$

$$1 = \frac{{}^2(٧-ص)}{\frac{١٤٤}{٢٥}} - \frac{{}^2(١+س)}{\frac{٨١}{٢٥}} \therefore$$

$$\text{أي أن: } 1 = \frac{{}^2(٧-ص) ٢٥}{١٤٤} - \frac{{}^2(١+س) ٢٥}{٨١} \quad \text{الصورة القياسية}$$

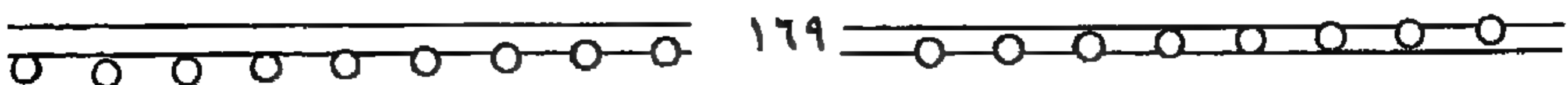
وعند تحويلها الى الصورة العامة:

$$\left\{ 1 = \frac{{}^2(٧-ص) ٢٥}{١٤٤} - \frac{{}^2(١+س) ٢٥}{٨١} \right\} \cdot ١٤٤ \times ٨١$$

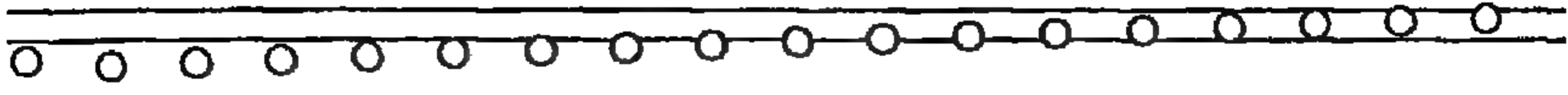
$$١٤٤ \times ٨١ = {}^2(٧-ص) ٨١ \times ٢٥ - {}^2(١+س) ١٤٤ \times ٢٥$$

$$١١٦٦٤ = {}^2(٧-ص) ٢٠٢٥ - {}^2(١+س) ٣٦٠٠$$

$$١١٦٦٤ = (٤٩ + ص ١٤ - {}^2ص) ٢٠٢٥ - (١ + س ٢ + {}^2س) ٣٦٠٠$$



### القطوع المخروطية



$$٣٦٠٠ \text{ س}^٢ + ٧٢٠٠ \text{ س} + ٣٦٠٠ - ٢٠٢٥ \text{ ص}^٢ + ١٤٣٥٠ \text{ ص} + ٩٩٢٢٥ - ١١٦٦٤ = \text{صفر}$$

$$٣٦٠٠ \text{ س}^٢ - ٢٠٢٥ \text{ ص}^٢ + ٧٢٠٠ \text{ س} + ١٤٣٥٠ \text{ ص} + ٩١١٦١ = \text{صفر}$$

وهذه المعادلة العامة للقطع الزائد.

مثال (١٢):

أوجد احداثيات المركز ونصف القطر للدائرة التي معادلتها:

$$٣ \text{ س}^٢ + ٣ \text{ ص}^٢ + ١٨ \text{ س} - ٦ \text{ ص} + ٣ = \text{صفر}$$

الحل:

نقسم المعادلة على ٣ لتصبح:

$$\text{س}^٢ + \text{ص}^٢ + ٦ \text{ س} - ٢ \text{ ص} + ١ = \text{صفر} \quad \text{ثم باكمال المربعين كما يلي:}$$

$$(\text{س}^٢ + ٦ \text{ س}) + (\text{ص}^٢ - ٢ \text{ ص}) = -١$$

بإضافة مربع نصف معامل كل متغير الى الطرفين:

$$(\text{س}^٢ + ٦ \text{ س} + ٩) + (\text{ص}^٢ - ٢ \text{ ص} + ١) = -١ + ٩ + ١$$

$$٩ = (\text{س} + ٣)^٢ + (\text{ص} - ١)^٢$$

والصورة القياسية:

$$(\text{س} - د)^٢ + (\text{ص} - هـ)^٢ = \text{نق}^٢$$

$$\therefore \text{المركز م} (-٣, ١), \quad \text{نق} = \sqrt{٩} = ٣$$

مثال (١٣):

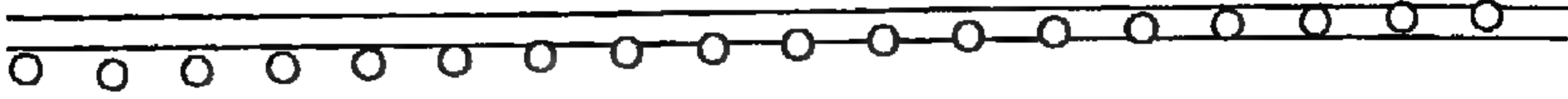
قطع ناقص اختلافه المركزي هـ =  $\frac{٢}{٣}$  وأحد رأسيه ر (٣ ، ١) والبؤرة

القريبة منه ب (١ ، ١) اكتب معادلته.



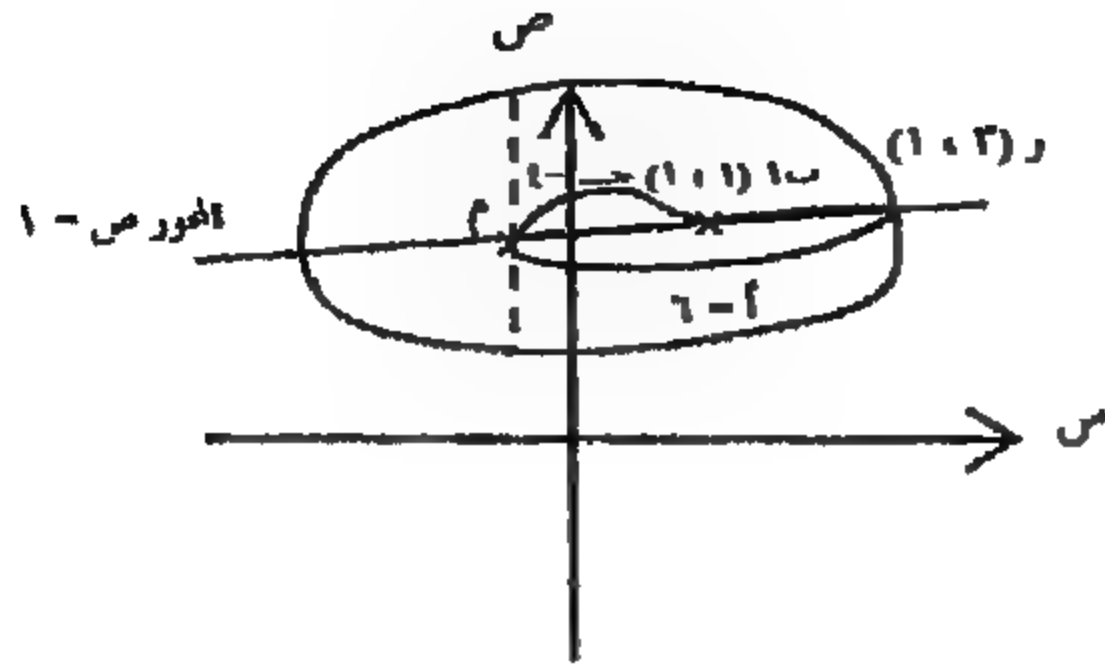


## القطع المخروطية



الحل:

عند تجسيد هذه الأوصاف على السطح البياني هكذا:



$$\frac{2}{3} = \frac{2}{3} \text{ ، لكن هـ } = \frac{2}{3} \text{ ، } \therefore \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \leftarrow \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \text{ ..... (1)}$$

ر ب، أ = ج - ج من الشكل

$$(2) \quad 1 - 3 = 1 - 3 \leftarrow 2 = 2 \leftarrow 2 = 2$$

وبحل المعادلتين (1) مع (2) هكذا:

$$1 = 1 \leftarrow 2 = 2 \leftarrow 2 = 2$$

$$\therefore 2 = 2 - 2 = 2 - 2 = 2$$

لكن ج = أ - ب قطع ناقص

$$\therefore 2 - 2 = 2$$

$$20 = 16 - 36 = 2$$

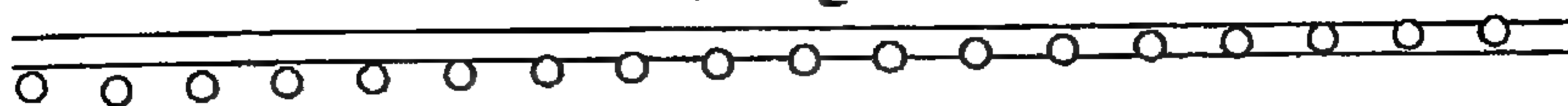
لإيجاد المركز نقول ونستعين بالرسم ايضاً:

المركز (1 ، 3 -)

$$\therefore \text{المعادلة: } 1 = \frac{(ص-هـ)}{2} + \frac{(س-د)}{2}$$

$$1 = \frac{(1-ص)}{20} + \frac{(3+س)}{36}$$

### القطع المخروطية



مثال (١٤):

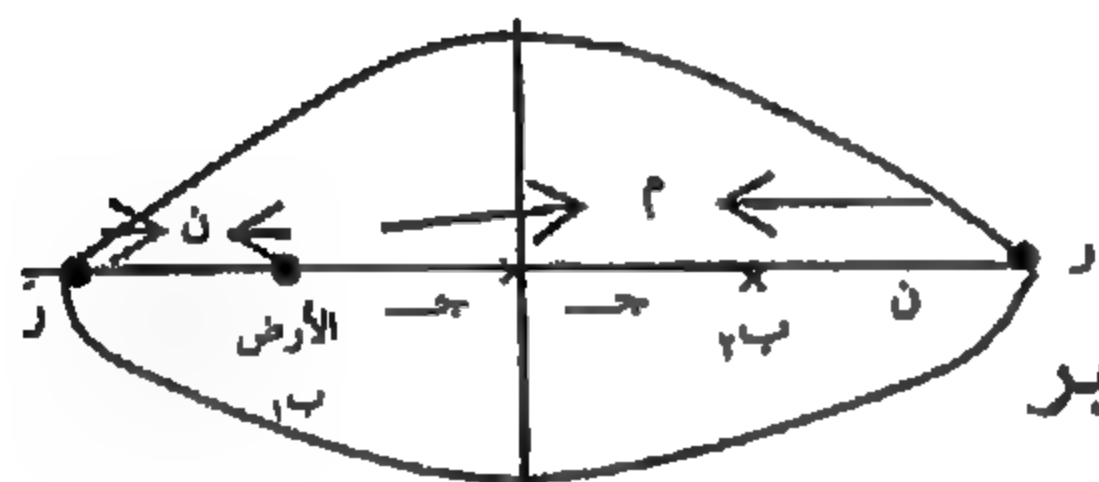
إذا علمت أن القمر يدور حول الأرض في مدار على شكل قطع ناقص بحيث تقع الأرض في إحدى بؤرتيه كما في الشكل.

وإذا كانت أطول مسافة بين الأرض والقمر

تساوي م كم

وأقصر مسافة بينهما ن كم

فبين أن الاختلاف المركزي لهذا القطع الناقص يساوي  $\frac{م - ن}{م + ن}$



بما أن  $ر ز = ٢$  (طول محوره الأكبر)

فإن  $٢ = م + ن$  (١) طول محوره الأكبر

والبعد البؤري  $ب ج = ٢ = م - ن$  (٢) (واضح من الشكل)

$$١ = \frac{م + ن}{٢} \quad \text{من (١)}$$

$$ج = \frac{م - ن}{٢} \quad \text{من (٢)}$$

$$\text{لكن هـ} = \frac{ج}{١} = \frac{\frac{م - ن}{٢}}{\frac{م + ن}{٢}} = \frac{م - ن}{م + ن} \quad \text{وهو المطلوب.}$$

مثال (١٥):

إذا كان طول المحور القاطع (٢ أ) لقطع زائد يساوي ٣ أمثال طول محوره المرافق (٢ ب) فما قيمة اختلافه المركزي؟

الحل:

$$٢ = ٣ (٢ ب)$$



## A musical staff consisting of two horizontal lines. There are 15 empty circles placed along the staff, intended for writing musical notes.

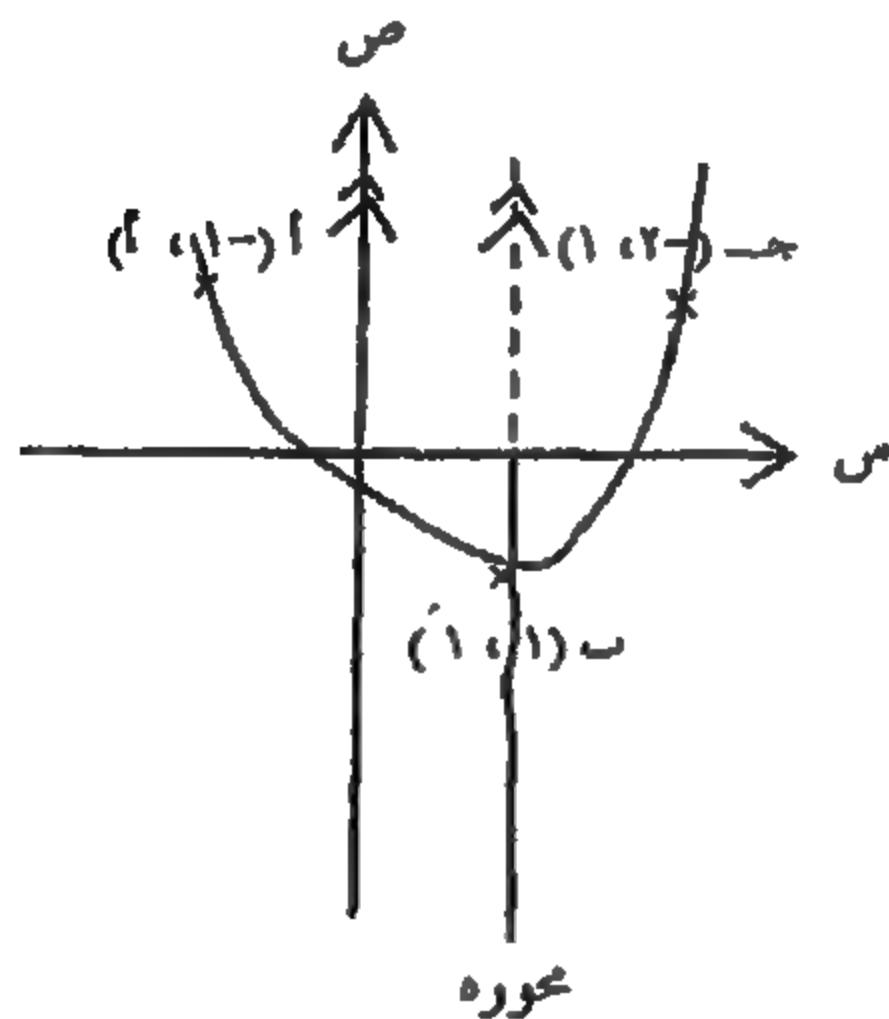
$$\frac{r_f 1.0}{q} = r_f \frac{1}{q} + r_f = r \left( 1 - \frac{1}{r} \right) + r_f = r_b + r_f = r_j \text{ لکن ج}$$

مثال (۱۶):

اكتب معادلة القطع المكافئ الذي يمر بالنقط الثلاث:

أ - ( ١ ، ٢ ) ، ب - ( ١ ، - ١ ) ، ج - ( ٢ ، ١ ) ومحوره يوازي محور الصادات.

الرسم يوضح نوعه.



انه صادي ومفتوح للأعلى

کما هو واضح بالشکل.

معادلته العامة ص. = أ س<sup>٢</sup> + ب س + ج

والآن نعوض النقط الثلاث أ ، ب ، ج ،

لنجد قيم  $a$  ،  $b$  ،  $c$

هكذا:

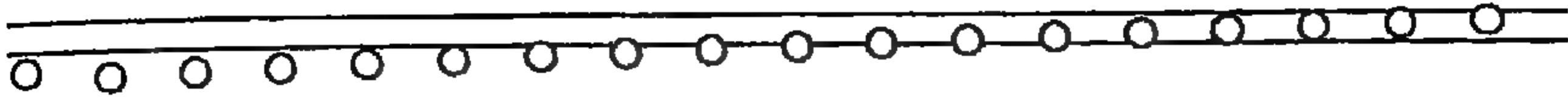
$$Y = \bar{J} + (1 - \alpha) \bar{B} + \alpha(1 - \alpha) \bar{A}$$

أ - ب + ج = ٢      (١) عند تعويض أ

$$1 - = \text{ج} + (1) \text{ب} + {}^2(1) \text{ا}$$

أ + ب + ج = - ۱ (۲) عند تعویض ب

# القطوع المخروطية



$$أ (٢) + ب (٢) + ج = ١$$

$$٤ أ + ب + ج = ١ \quad (٣) \text{ عند تعويض ج}$$

ويحل المعادلات الثلاث (١) ، (٢) ، (٣) بالحذف هكذا:

لحذف ب

$$\begin{array}{r} (٢) \quad \left( \begin{array}{l} ٢ \\ ١ \end{array} \right) \begin{array}{l} أ + ب + ج = ١ \\ ٤ أ + ب + ج = ١ \end{array} \\ (٣) \quad \left( \begin{array}{l} ٢ \\ ١ \end{array} \right) \begin{array}{l} ٢ أ + ب + ج = ٢ \\ ٢ أ - ب + ج = ١ \end{array} \\ \hline (٥) \quad \begin{array}{l} ٢ أ + ب + ج = ٢ \\ ٢ أ - ب + ج = ١ \end{array} \end{array}$$

لحذف ب

$$\begin{array}{r} (١) \quad ٢ = أ + ب - ج \\ (٢) \quad ١ = أ + ب + ج \\ \hline (٤) \quad ١ = ٢ أ + ج \end{array}$$

جمعاً

لحذف أ

$$\begin{array}{r} (٤) \quad ١ = ٢ أ + ج \\ (٥) \quad ٣ = ٢ أ + ج \\ \hline ٢ = ج \end{array}$$

جمعاً

$$\frac{٢}{٣} = ج$$

$$(٤) \quad ١ = ٢ أ + ج$$

$$\therefore ١ = \left( \frac{٢}{٣} \right) ٢ + ج$$

$$٣ \left( ١ = \frac{٤}{٣} - ج \right)$$

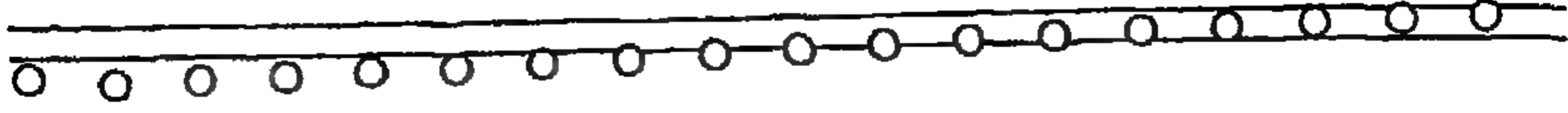
$$٣ = ٤ - ٦ ج$$

$$٧ = ٦ ج$$

$$\frac{٧}{٦} = أ$$



### القطوع المخروطية



$$\text{لكن } أ + ب + ج = -1$$

$$\therefore ٦ \left( \frac{٧}{٦} + ن - \frac{٢}{٣} \right) = -1$$

$$٧ + ٦ ب - ٤ = -1$$

$$٦ ب = -٦ - ٣$$

$$٦ ب = -٩$$

$$ب = \frac{-٩}{٦} = \frac{-٣}{٢}$$

$\therefore$  المعادلة:

$$ص = أ س^٢ + ب س + ج$$

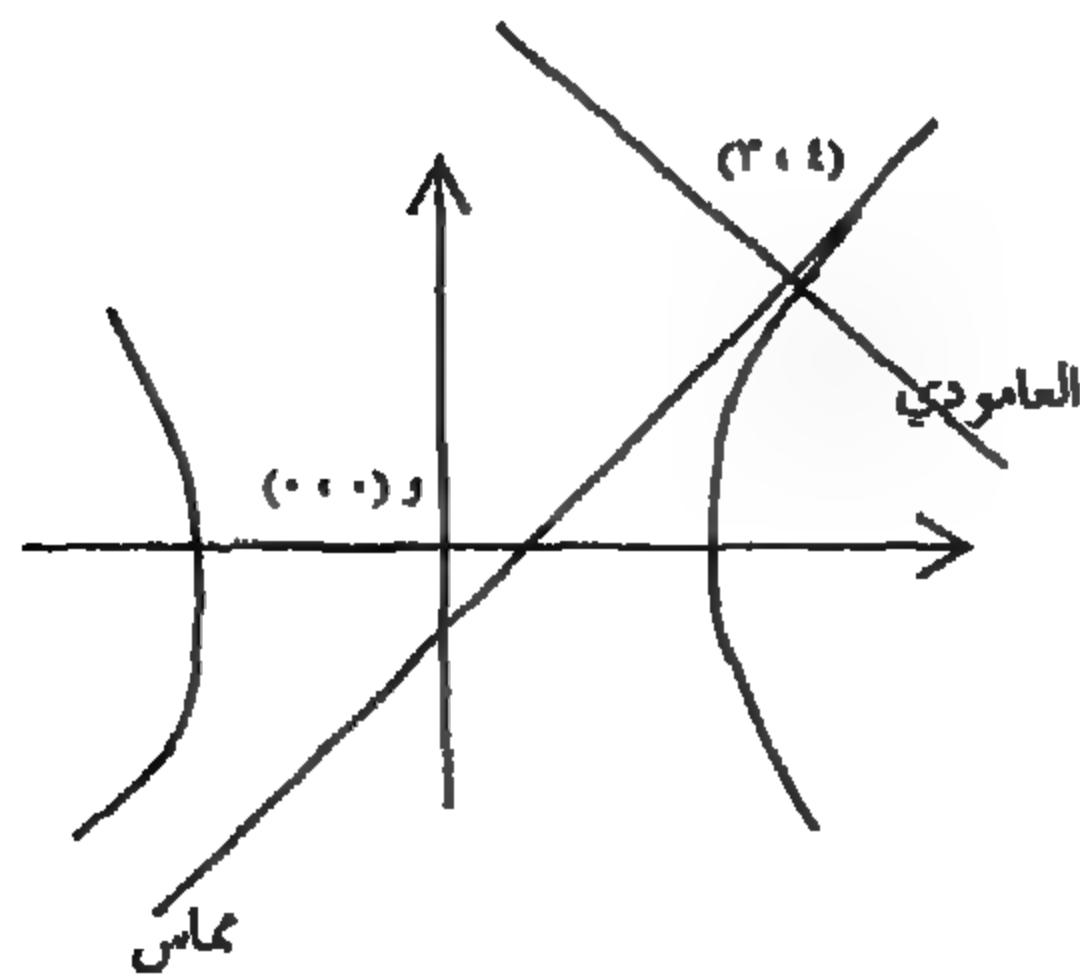
$$ص = \frac{٧}{٦} س^٢ - \frac{٣}{٢} س - \frac{٢}{٣}$$

$\therefore$  معادلة القطع المكافئ العامة:

$$ص = \frac{٧}{٦} س^٢ - \frac{٣}{٢} س - \frac{٢}{٣}$$

مثال (١٧):

أوجد معادلة المماس ومعادلة العامودي عليه للقطع الزائد  $٩ س^٢ - ٨ ص^٢ = ٧٢$  عند النقطة (٤ ، ٣).



الحل:

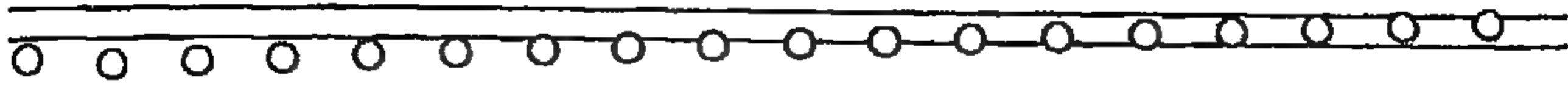
$$\frac{٩ س^٢ - ٨ ص^٢ = ٧٢}{٧٢}$$

$$١ = \frac{ص^٢}{٩} - \frac{س^٢}{٨}$$

سيني مركزه نقطة الأصل

نحقق نقطة الأصل:

## القطوع المخروطية



$$72 = 9^2 - 8^2 = 81 - 64$$

$$72 = 72 - 144 \quad \therefore (3, 4) \text{ نقطة التماس وتقع على المنحنى}$$

مماس = ق (4) نجد ق (س) أو  $\frac{دص}{دس}$  بالاشتقاق الضمني

$$9س^2 - 8ص^2 = 72$$

$$18س - 16ص \frac{دص}{دس} = 0$$

$$\frac{-18س}{-16ص} = \frac{دص}{دس}$$

$$\frac{9س}{8ص} = \frac{دص}{دس}$$

$$\frac{3}{2} = \frac{دص}{دس} = \text{ق (4)} = \text{مماس}$$

$$س = 4$$

$$ص = 3$$

معادلة المماس:

$$ص - ص_1 = \text{مماس} (س - س_1)$$

$$ص - 3 = \frac{3}{2} (س - 4)$$

$$ص - 3 = \frac{3}{2} (س - 4)$$

معادلة المماس.

$$\text{ص} = \frac{3}{2} (س - 4) + 3$$

$$\frac{ص - 3}{3} = \frac{س - 4}{2} = \frac{1}{\text{مماس}}$$

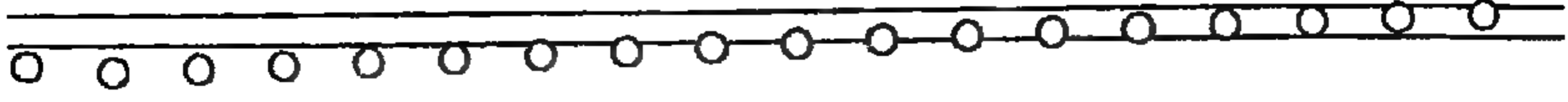
معادلة العامودي:

$$ص - 3 = \frac{2}{3} (س - 4)$$

$$\text{لكن } \frac{17}{3} = \frac{9+8}{3} = \frac{3}{1} + \frac{8}{3}$$



### القطوع المخروطية



$$\text{ص} - ٣ = \frac{٢}{٣} \text{س} + \frac{٨}{٣}$$

$$\text{ص} = -\frac{٢}{٣} \text{س} + \frac{٨}{٣} + \frac{٣}{١}$$

معادلة العامودي عليه عند نقطة التماس

$$\therefore \text{ص} = \frac{٢}{٣} + \frac{١٧}{٣}$$

مثال (١٨):

ما نوع كل من القطوع المخروطية التي معادلة منحناه:

$$(i) \text{س}^٢ + \text{ص}^٢ = ٤$$

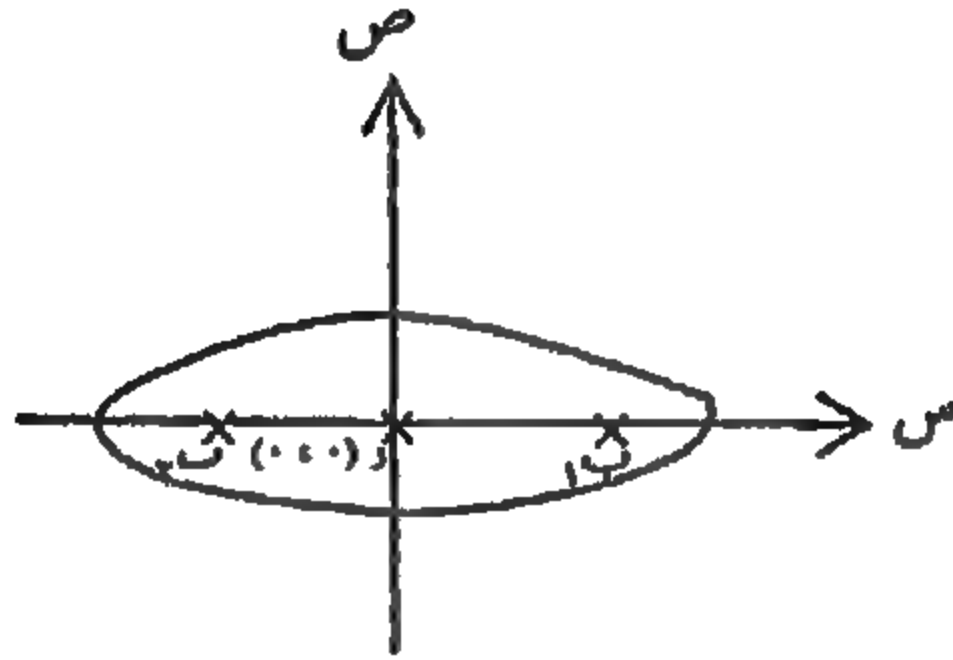
الحل:

تقسم المعادلة على ٤

$$١ = \frac{\text{ص}^٢}{٤} + \frac{\text{س}^٢}{٤}$$

انه قطع ناقص سيني مركزه نقطة الأصل

وتمثيله البياني كان في الشكل.



$$(ii) \text{س}^٢ + \text{ص}^٢ = ٣٦$$

$$\text{س}^٢ - \text{ص}^٢ = ٣٦$$

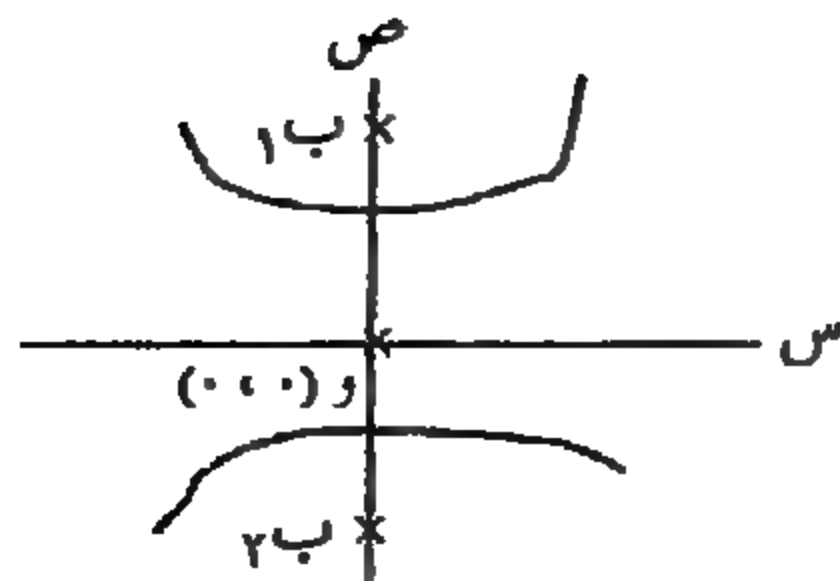
بالقسمة على - ٣٦ كما يلي

$$١ = \frac{\text{ص}^٢}{٣٦} - \frac{\text{س}^٢}{٣٦}$$

$$١ = \frac{\text{س}^٢}{٣٦} - \frac{\text{ص}^٢}{٣٦}$$

انه قطع زائد صادي مركزه نقطة الأصل

وتمثيله البياني كما في الشكل.





### القطع المخروطية



$$(iii) \text{ ص}^2 + \text{ص}^2 - 2\text{ص} + 6\text{ص} - 2 = \text{صفر}$$

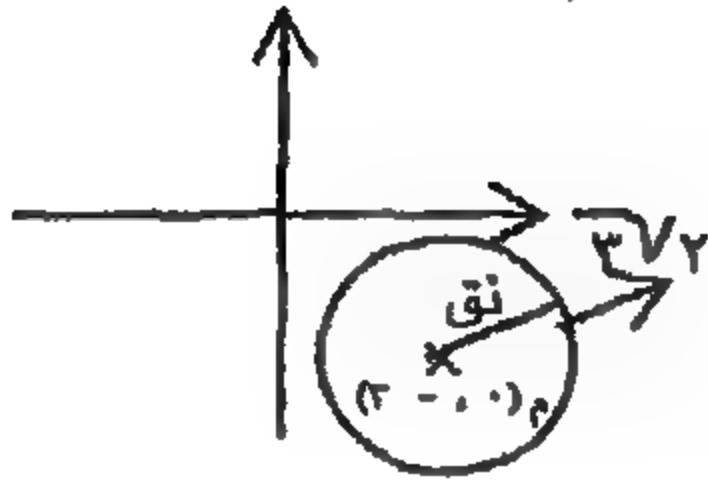
باكمال المربعين:

$$2 = (\text{ص}^2 + 6\text{ص}) + (2 - 2\text{ص})$$

بإضافة مربع نصف معامل المتغير الى كل طرف

$$2 + 3 + 1 = (\text{ص}^2 + 6\text{ص} + 3) + (2 - 2\text{ص} + 1)$$

$$12 = (\text{ص} + 3)^2 + (1 - 2\text{ص})^2$$



انه دائرة مركزها (3, 1) ونصف قطرها

$$\sqrt{12} = \text{نق}$$

$$\sqrt{3/2} =$$

وتمثيلها البياني كما في الشكل:

$$(iv) \text{ ص}^2 - 6\text{ص} + 4\text{ص} - 12 = \text{صفر}$$

نرتبه:

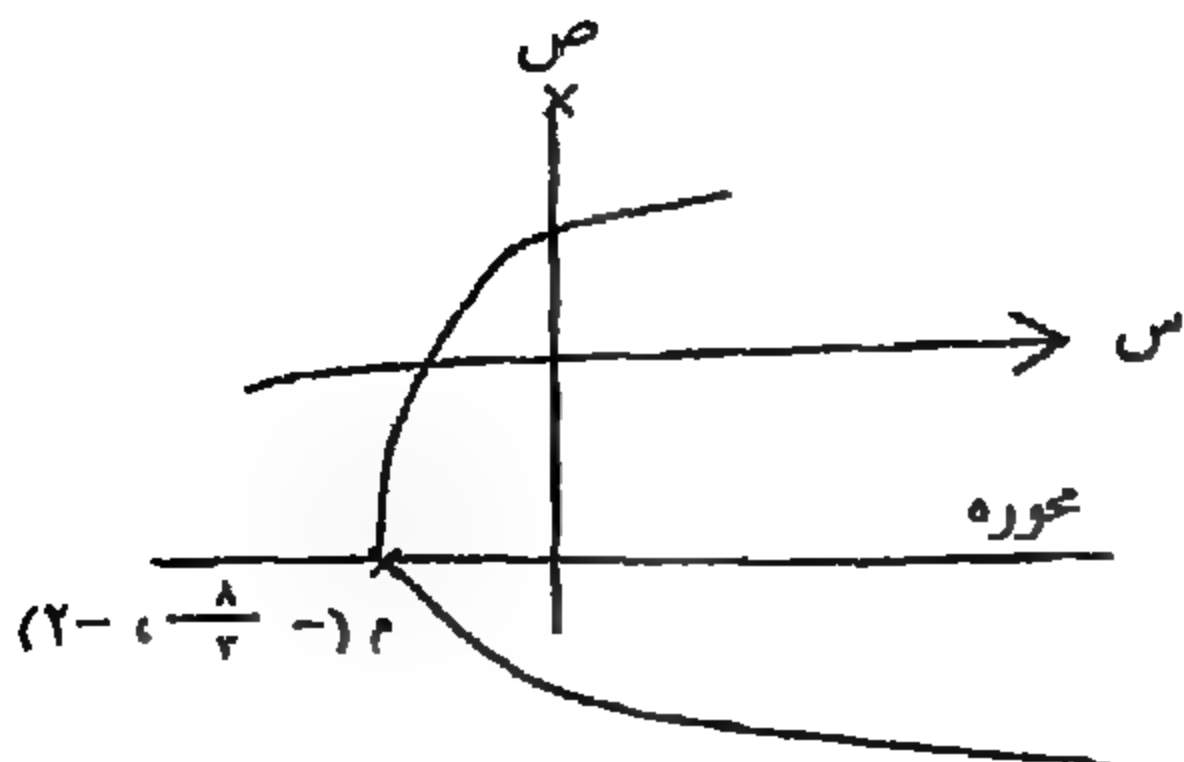
$$\text{ص}^2 + 4\text{ص} = 6\text{ص} + 12$$

باكمال المربع: اضافة مربع معامل ص للطرفين:

$$\text{ص}^2 + 4\text{ص} + 6\text{ص} + 12 = \text{ص}^2 + 4\text{ص} + 6\text{ص} + 12$$

$$(\frac{1}{3} + \text{ص}) 6 = 16 + 6\text{ص} = (2 + \text{ص})^2$$

$$(\frac{1}{3} + \text{ص}) 6 = (2 + \text{ص})^2$$

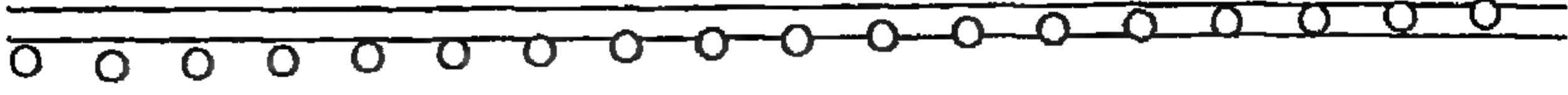


انه قطع مكافئ سيني مفتوح لليمين

$$\text{رأسه } (-\frac{1}{3}, 2)$$

وتمثيله البياني كما في الشكل.

القطوع المخروطية



مثال (٢٠):

إذا كانت المعادلتان  $s = قان$  ،  $ص = ظان$

حيث  $\frac{\pi}{3} \geq n \geq \frac{\pi}{4}$  - تحددان موقع جسيم يتحرك على منحنى في اللحظة  $n$  ، أوجد معادلة المنحنى التي تتحرك عليه النقطة ونوعه واختلافه المركزي.

الحل:

نحاول أن نربط المتغير  $s$  بالمتغير  $ص$  باستبعاد النسبة المثلثية  $قان$  ،  $ظان$  هكذا:

بما أن  $s = قان$

$$\therefore s^2 = قان^2 \quad (١)$$

وبما أن  $ص = ظان$

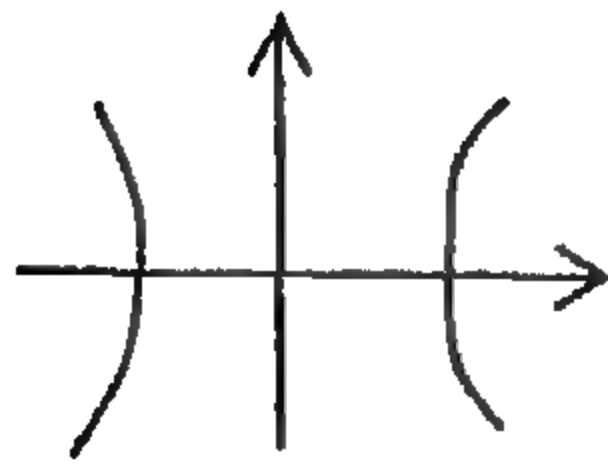
$$\therefore ص^2 = ظان^2 \quad (٢)$$

$$\text{وبما أن } قان^2 = ظان^2 + ١ \quad \text{من } \frac{جان^2 + جتان^2}{جتان^2} = ١$$

$$ظان^2 + ١ = قان^2$$

$$\therefore s^2 = ص^2 + ١$$

$$س^2 - ص^2 = ١$$



فالمنحنى لقطع زائد مركزه نقطة الأصل

سيني

$$١ = \frac{ص^2}{١} - \frac{س^2}{١}$$

$$١ = أ^2 \leftarrow ١ = أ^2$$

$$١ = ب^2 \leftarrow ١ = ب^2$$

## القطع المخروطية



$$ج^2 = أ^2 + ب^2 \text{ كونه زائد}$$

$$ج^2 = 1 + 1 = 2$$

$$ج = \sqrt{2}$$

$$\text{اختلافه المركزي} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \frac{ج}{أ} < 1$$

مثال (٢٠):

$$\text{إذا كان الاختلاف المركزي للقطع المخروطي} \frac{ص}{ب} + \frac{س}{أ} = 1 \text{ هو هـ}$$

$$\text{وكان الاختلاف المركزي للقطع المخروطي} \frac{ص}{ب} - \frac{س}{أ} = 1 \text{ هو هـ}$$

$$فبيّن أن (هـ) = (هـ) + (هـ)$$

الحل:

بما أن الاختلاف المركزي بشكل عام وجمع القطوع المخروطية  $\frac{ج}{أ} = 1$  فإن:

$$\frac{ج}{أ} = 1 \text{ لكن } ج^2 = أ^2 - ب^2 \text{ كونه ناقص}$$

$$ج^2 = أ^2 - ب^2$$

$$\frac{ج}{أ} = 1 \text{ لكن } ج^2 = أ^2 + ب^2 \text{ كونه زائد}$$

$$ج^2 = أ^2 + ب^2$$

$$\text{أي أن (هـ)} = \frac{ج}{أ}$$

$$\frac{ج}{أ} = (هـ)$$

$$\therefore \frac{ج}{أ} + \frac{ج}{أ} = (هـ) + (هـ)$$

$$= \frac{(أ + ب) + (أ - ب)}{أ}$$

$$\therefore \frac{2أ}{أ} = (هـ) + (هـ)$$

$$2 =$$

وهو المطلوب



## القطوع المخروطية



(٢٣ - ٦) أسئلة وتدريبات وتمارين تتطلب حلولاً من الدارسين والدارسات

(١) أوجد مكونات القطع المكافئ الذي معادلته:

$$ص^2 = -٤ س$$

{ ارشاد: استعن بالرسم = الرأس و (٠ ، ٠) ، البؤرة ب (٠ ، - ١) }  
 { معادلة الدليل ص = ١ ، معادلة المحور س = صفر }

(٢) أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه م (٢ ، ٠) وبؤرته ب (٢ ، ٠)

$$\{ ص = \frac{١}{٨} س^2 - \frac{١}{٢} س + \frac{١}{٢} \}$$

(٣) اذا كان الاختلاف المركزي للمدار الذي يسلكه كوكب المريخ أثناء دورانه حول الشمس هو ٠,٠٩٣ تقريباً، وطول محوره الأكبر ٤٥٦ مليون كم، أوجد معادلة هذا المدار.

$$\{ ١ = \frac{ص^2}{٢(٢٢٧)} + \frac{س^2}{٢(٢٢٨)} \} ، قطع ناقص$$

(٤) اذا كان الاختلاف المركزي للمدار الذي تسلكه الأرض أثناء دورانها حول الشمس هو ٠,٠١٧ وطول محوره الأكبر ٢٩٩ مليون كم، أوجد معادلة هذا المدار:

$$\{ ١ = \frac{ص^2}{٢(١٤٩,٤٨)} + \frac{س^2}{٢(١٤٩,٥)} \} قطع ناقص$$

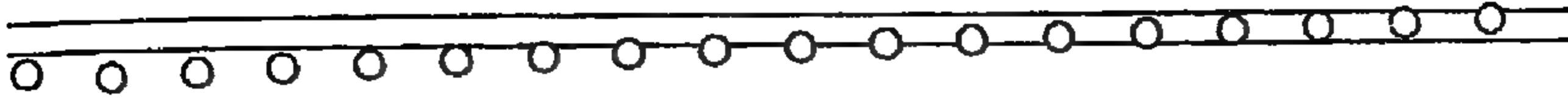
(٥) أوجد مكونات القطع الزائد الذي معادلته  $ص^2 = \frac{ص}{٤} - ١$  ثم ارسم منحناه.

{ مركزه م (٠ ، ٠) ، رأساه (٠ ، ١) ، (٠ ، - ١) }

بؤرته (٠ ،  $\sqrt{٥}$ ) ، (٠ ،  $-\sqrt{٥}$ ) معادلة محوره القاطع ص = صفر

معادلة محوره المرافق س = صفر ، اختلافه المركزي ه =  $\frac{\sqrt{٥}}{١}$

### الفتوح المخروطية



(٦) ما نوع القطع المخروطي الذي معادلة منحناه:

$$١٦س^٢ - ص^٢ - ٣٢س - ٦ص = ٥٧ \text{ ثم ارسم منحناه.}$$

{ زائد }

(٧) اكتب معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته ب (٠ ، ٣) ومعادلة دليله ص = ٣

$$\{س^٢ = ١٢ص\}$$

(٨) اكتب معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته ب (٣ ، ١) ومعادلة دليله س = ١ ثم ارسم منحناه.

$$\{س = \frac{١}{٤}ص^٢ - \frac{١}{٢}ص + \frac{٩}{٤}\}$$

(٩) أوجد مكونات القطع المكافئ الذي معادلة منحناه:

$$س^٢ + ٢س - ٦ص - ١٧ = \text{صفر}$$

$$\{ \text{رأسه } (-١ ، ٣) ، \text{ دليله } ص = -\frac{٩}{٢} \text{ بؤرته } (-١ ، -\frac{٣}{٢}) \}$$

(١٠) أوجد مكونات القطع الناقص الذي معادلة منحناه:

$$س^٢ + ٤ص^٢ = ٨ \text{ ثم ارسم منحناه.}$$

$$\{ \text{مركزه م } (٠ ، ٠) \text{ بؤرتاه } (٠ ، \sqrt{٦}) ، (٠ ، -\sqrt{٦}) \}$$

$$\text{رأساه } (\sqrt{٢}/٢ ، ٠) ، (-\sqrt{٢}/٢ ، ٠) ، ط(٠ ، \sqrt{٢}) ، ط(٠ ، -\sqrt{٢})$$

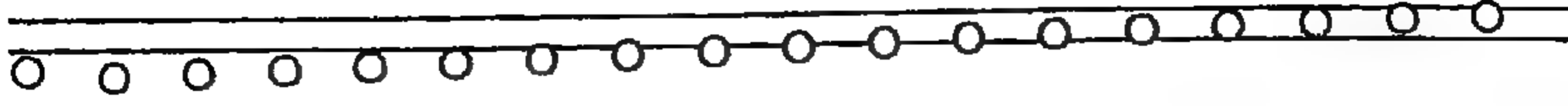
$$\{ \frac{\sqrt{٦}}{\sqrt{٢}} = هـ \}$$

(١١) اكتب معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه (٢ ، -١) ، (٢ ، ٧) وطول محوره الأكبر = ١٢

$$\{ ١ = \frac{(ص - ٣)^٢}{٣٦} + \frac{(س - ٢)^٢}{٢٠} \}$$



### القطع المخروطية



(١٢) ما نوع القطع المخروطي الذي معادلة منحناه:

$$9س^2 - 18س + 4ص^2 + 16ص = 11 \quad \{ \text{ناقص} \}$$

{ ارشاد: استعن باكمال المربع }

(١٣) ما قيمة ك في معادلة القطع الناقص

$$ك = \frac{(ص+2)^2}{9} + \frac{(س-1)^2}{4}$$

لتجعل منحناه يمر بنقطة الأصل

{ ارشاد: عوض نقطة الأصل }

(١٤) اكتب معادلة الدائرة التي تمر بالنقطتين (٣ ، ٢) ، (-١ ، ١) ويقع

مركزها على المستقيم س - ٣ص - ١١ = صفر

$$\{ 9س^2 + 4ص^2 - 7س + 5ص - 14 = \text{صفر} \}$$

$$(١٥) \text{ أوجد بؤرة القطع المكافئ } ص = -\frac{1}{4}س^2 + \frac{3}{4}س - \frac{2}{4}$$

$$\left\{ \left( -\frac{15}{16}, \frac{3}{2} \right) \right\}$$

{ ارشاد: حول معادلته الى الصورة القياسية }

(١٦) ما احداثيات بؤرة القطع المكافئ ص^2 - 4ص + 6س - 14 = صفر

$$\left\{ \left( 2, \frac{3}{2} \right) \right\}$$

(١٧) ما احداثيات رأسي القطع الناقص الذي تمثله المعادلات:

$$س = 3 \text{ جان} , \quad ص = 2 \text{ جتان} \quad \{ (0, \pm 3) \}$$

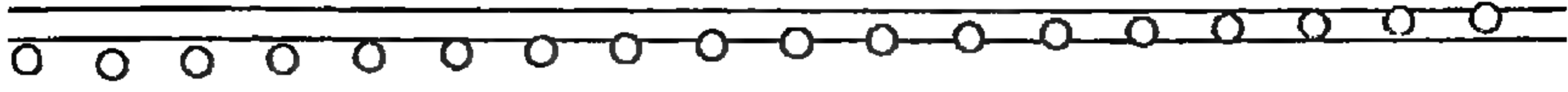
(١٨) اكتب معادلة الدائرة التي تمر بالنقط الثلاث التالية:

$$(5, 3), (2, 2), (-1, -5)$$

$$\{ 9س^2 + 4ص^2 - 4س + 2ص - 20 = \text{صفر} \}$$



## انقسام المخروطية



(١٩) ما طول نصف قطر الدائرة  $٤س^٢ + ٤ص^٢ + ١٦س - ٨ص - ٥ = ٥$  صفر

$$\left\{ -\frac{٥}{٢} \right\}$$

{ ارشاد: اجعل معامل  $س^٢$  ،  $ص^٢$  وحدة واحدة أولاً }

(٢٠) ما احداثيات بؤرة القطع المكافئ  $٤ص^٢ - ٤ص + ٦س - ٨ = ٨$  صفر

$$\left\{ \left( ٢, -\frac{١}{٢} \right) \right\}$$

(٢١) أوجد ميل المماس للقطع المكافئ  $٨ = ٨س$  عند النقطة  $(٢, ١٤)$

$$\{ ١ \}$$

(٢٢) اذا حدث انسحاب لبيان الاقتران  $٤ = ٤ - ٤ص$  بمقدار وحدتين باتجاه

اليمين (اتجاه محور السينات الموجب)، فما هي احداثيات بؤرته في الوضع

الجديد؟

$$\{ (٢, -١) \}$$

(٢٣) ما النسبة بين الاختلاف المركزي للقطع  $١ = \frac{٢ص}{٤} + \frac{٢س}{٩}$

$$\text{والقطع } ١ = \frac{٢ص}{٤} - \frac{٢س}{٩}$$

$$\{ \overline{١٣٧} : \overline{٥٧} \}$$

(٢٤) ما احداثيات مركز القطع الناقص:

$$٤س^٢ + ٩ص^٢ - ٤٨س + ٧٢ص + ١٤٤ = ٥$$

$$\{ (٤ - ٦) \}$$

(٢٥) احسب طول المحور القاطع للقطع الزائد:

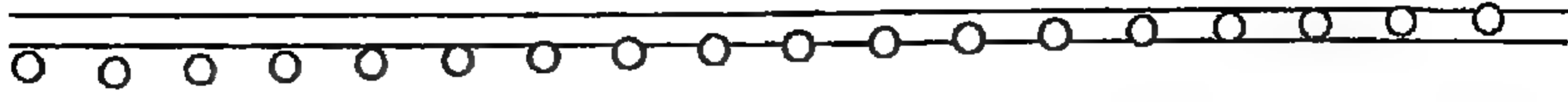
$$\{ ٨ \}$$

$$٩س^٢ = ١٦ص^٢ + ١٤٤$$

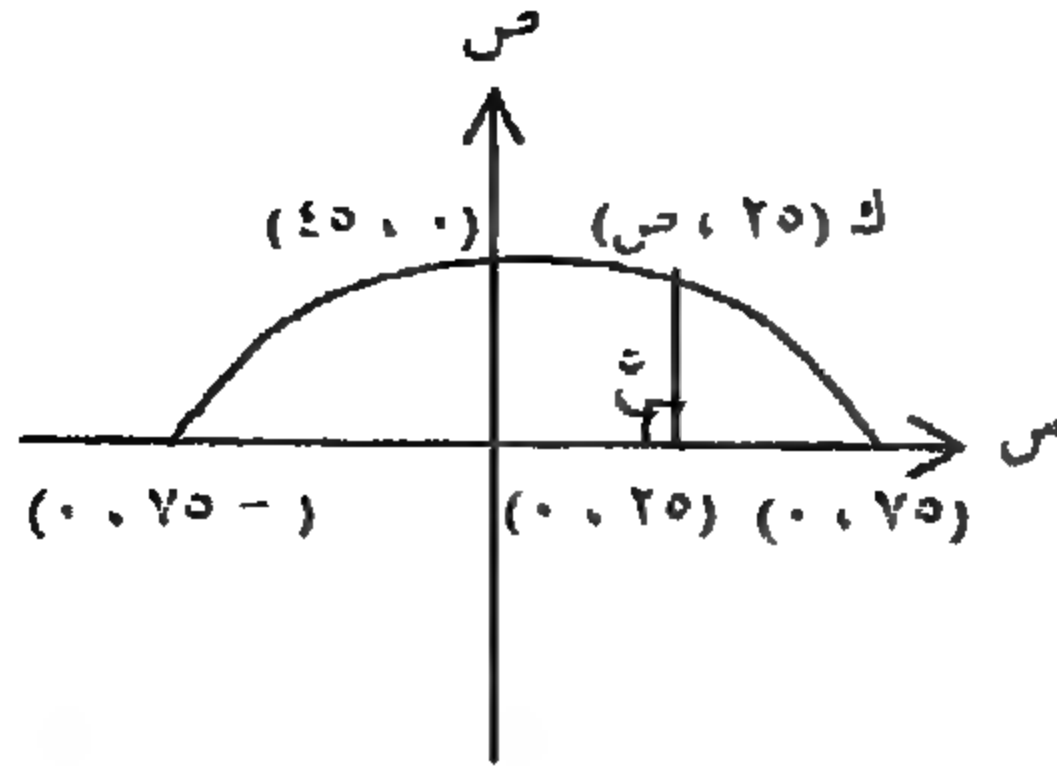




## القطع المخروطية



(٢٦) اذا كان الشكل المجاور يمثل طريقاً قوسياً



على صورة نصف قطع ناقص

فاعتماداً عليه احسب طول

العامود ع لهذه الطريق.

$$\{ \sqrt{2/30} \}$$

{ ارشاد: أوجد معادلة القطع أولاً ثم عوض ك (٢٥, ص) ثانياً }

(٢٧) اكتب معادلة العامودي على مماس القطع الزائد  $1 = \frac{ص^2}{9} - \frac{س^2}{9}$

عند رأسيه

$$\{ ص = صفر \}$$

(٢٨) ما قيمة هـ في معادلة الدائرة  $س^2 + ص^2 - ٨س + ١٠ص + هـ = صفر$

علماً بأن نصف قطرها يساوي ٧ وحدات طول؟ { ٨ - }

(٢٩) ما نوع القطع المخروطي الذي معادلة منحناه:

$$٩س^2 - ١٦ص^2 - ١٨س - ٦٤ص - ١٩٩ = صفر$$

$$\{ \text{زائد مركزه (١, -٢)} \}$$

(٣٠) اذا كانت  $٩س^2 - ٢٥ص^2 + ٢٢٥ = صفر$  تمثل معادلة قطع زائد وكانت

ن (س, ص) نقطة واقعة على منحناه، جد الفرق المطلق بين بعدي النقطة ن

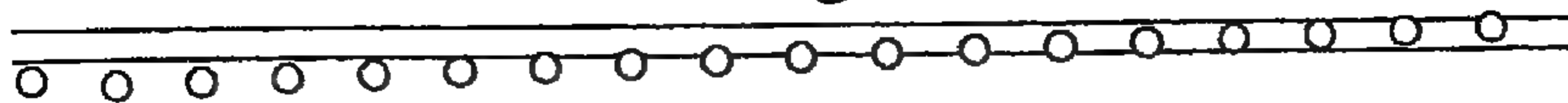
عن بؤرتي القطع.

{ ارشاد: طول المحور القاطع }

(٣١) عيّن نوع القطع المخروطي الممثل منحناه بالمعادلة

$$٩س^2 - ١٦ص^2 - ٣٦س + ٣٢ص = ١٤٤ \text{ ثم ارسمه.}$$





(٣٢) ما:

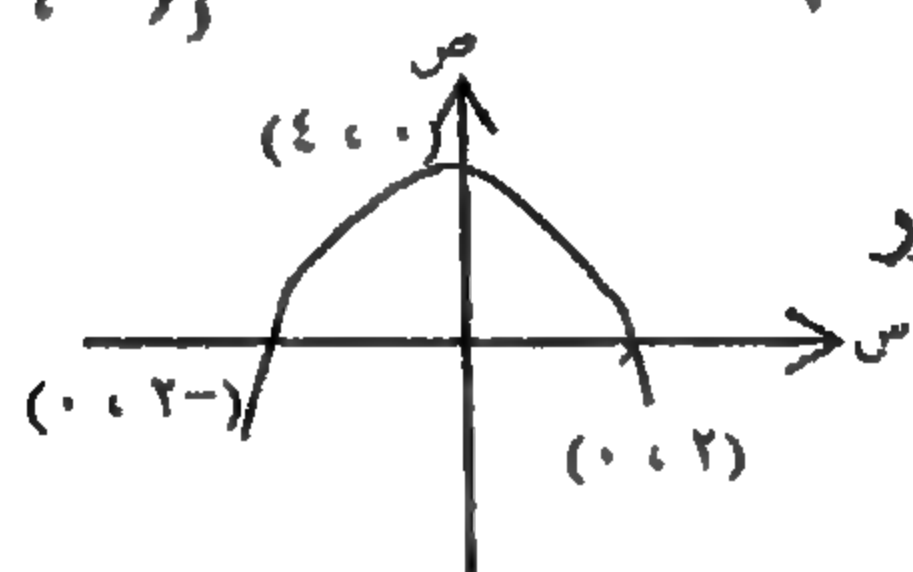
(١) معادلة المحور الأكبر للقطع الناقص  $25x^2 + 9y^2 - 36x - 25y = 225$

{ ص = صفر }

(٢) الاختلاف المركزي للقطع الزائد  $5x^2 - 4y^2 = 20$  {  $-\frac{3}{2}$  }

(٣) طول المحور القاطع للقطع الزائد  $\frac{y^2}{8} - \frac{x^2}{5} = 1$  {  $2\sqrt{4}$  }

(٤) بؤرتي القطع الناقص  $3x^2 + 2y^2 = 6$  {  $(0, \pm 1)$  }



(٥) معادلة المنحنى الممثل بالشكل المجاور

{  $س^2 = 4 + ص$  }

{ ارشاد:  $ص = -أ$   $س + ب$   $ج$  ثم عوض النقط الثلاث لتحصل على

الصورة المناسبة لمنحنى الشكل }

(٦) معادلة المماس لمنحنى القطع المكافئ  $ص = \frac{1}{2}س^2$  عند النقطة  $(4, 8)$

{  $ص = 4س - 8$  }

(٧) إحداثيات رأس القطع المكافئ  $(س - 1) + ٨(ص + 2) = صفر$

{  $(1, -2)$  }

(٣٣) المعادلتان  $س = ق$   $ن$  ،  $ص = ظ$   $ن$  حيث  $٠ \leq ن < \frac{\pi}{2}$  تحددان موقع

الجسيم أ (س ، ص) على المنحنى في اللحظة ن .

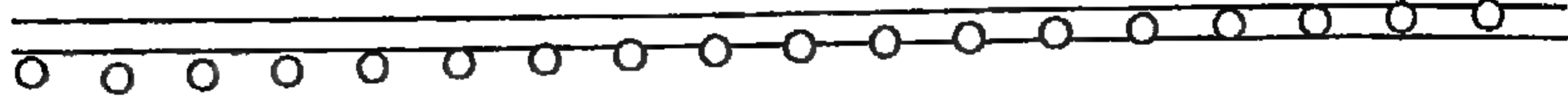
جد معادلة المنحنى ثم بيّن نوعه وعناصره الأساسية.

{ ارشاد: استعن بالمتطابقة  $ق^2 = ظ^2 + ١$  }

(٣٤) جد معادلة العامودي على المنحنى على المماس عند النقطة  $(-2, 1)$

لمنحنى القطع الناقص  $س^2 + ٤ص^2 = ٨$

### القطع المخروطية



(٣٥) اكتب معادلة الدائرة التي مركزها  $(-11, -11)$  وتمس المحورين.

(٣٦) أوجد معادلة دليل القطع المكافئ  $(س - 1)^2 - ٨ = ٤ ص$   $\{س = -3\}$

(٣٧) أوجد معادلة المحل الهندسي للنقطة  $ن(س, ص)$  التي تتحرك في

المستوى حيث بعدها عن النقطة  $(٤, -1)$  دائماً يساوي بعدها عن

المستقيم  $س - ١٠ = صفر$ .

$$\{(ص + 1)^2 = -12(س - ٧)\}$$

(٣٨) أوجد طول المحور الأصغر في القطع الناقص السيني الذي فيه بعد أحد

رأسيه عن البؤرة القريبة له  $= ١$  وبعده عن البؤرة البعيدة عنه  $= ٥$

$$\{5\sqrt{2}\}$$

(٣٩) أوجد معادلة المحور الأصغر للقطع  $(٢ + س)^2 + ٩ ص^2 = ٣٦$

$$\{س = -1\}$$

(٤٠) أوجد قيم  $م$  التي تجعل المعادلة  $١ = \frac{ص^2}{م - ٤} + \frac{س^2}{م - ٧}$  تمثل منحنى قطع

زائد  $\{م \in (٧, ٤)\}$

{ارشاد:  $(م - ٧)(م - ٤) > صفر$ }

(٤١) صنف كل من المعادلات التالية الى أحد أنواع القطوع المخروطية، ثم مثل

منحنياتها على المستوى الديكارتي تمثيلاً صواباً:

$$(١) ص^2 - ٢س + ٧ص - ٥ = صفر$$

$$(٢) ٢س^2 + ٢ص^2 - ٢س - ٤ص - ١ = صفر$$

$$(٣) ٢س^2 - ٥ص = ٣ص^2 - ٤س + ١$$

## القطوع المخروطية



(٤٢) جد البعد بين بؤرتي (البعد البؤري) القطع الزائد الذي معادلته:

$$1 = \frac{ص^2}{7} - \frac{س^2}{9}$$

(٤٣) ما قيمة الاختلاف المركزي للقطع:

$$\left\{ \frac{\sqrt{7}}{4} \right\} \quad 16س^2 + 9ص^2 - 64س + 56ص + 1 = \text{صفر}$$

(٤٤) اذا كان الاختلاف المركزي للقطع المخروطي  $\frac{ص^2}{ب} + \frac{س^2}{ا} = 1$  هو هـ،

وكان الاختلاف المركزي للقطع المخروطي  $\frac{ص^2}{ب} - \frac{س^2}{ا} = 1$  هو هـ،

$$2 = (هـ)_1 + (هـ)_2$$

(٤٥) اكتب معادلة الدائرة التي تمر بالنقطتين  $(-1, 4)$  ،  $(0, -3)$  ويقع

مركزها على المستقيم  $س - 2ص = 1$

(٤٦) صنّف منحنى كل من المنحنيات التالية الى أحد القطوع المخروطية ثم ارسم

المنحنى:

(١)  $ص^2 + 2ص - س - 1 = \text{صفر}$  {قطع مكافئ سيني، مفتوح لليمين}

(٢)  $9س^2 + 4ص^2 + 18س + 8ص + 23 = 0$  {قطع ناقص صادي}

(٣)  $4س^2 - 2ص^2 - 16س + 10ص - 17 = \text{صفر}$  {قطع زائد سيني}

(٤٧) ما النسبة بين الاختلاف المركزي هـ للقطع الناقص  $1 = \frac{ص^2}{144} + \frac{س^2}{169}$

والاختلاف المركزي هـ للقطع الزائد  $1 = \frac{ص^2}{144} - \frac{س^2}{169}$

(٤٨) اكتب المعادلات التالية بالصورة القياسية لها:  $\{25: 88 \text{ تقريباً}\}$

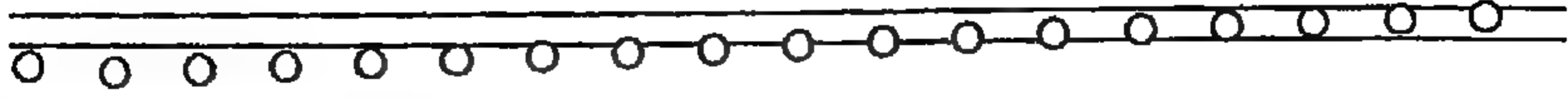
$$(1) 25س^2 + 75ص^2 = 150$$

$$(2) 9ص^2 - 10ص = 16س - 9$$

$$(3) 8 = 2س^2 - 4ص^2$$



### القطوع المخروطية



(٤٩) اكتب معادلة المحل الهندسي للنقطة ن (س ، ص) المتحركة بشرط أن المسافة بينها وبين رأس القطع المكافئ  $s^2 = 16$  ص تساوي ضعف المسافة بينها وبين بؤرتيه.

(٥٠) أوجد قيمة أ ، ب ، ج لكل قطع من القطوع الزائدة التالية:

$$\text{حيث ج}^2 = \text{أ}^2 + \text{ب}^2$$

$$\{ \sqrt{34}, 3, 5 \}$$

$$(1) \quad 1 = \frac{s^2}{9} - \frac{v^2}{25}$$

$$\{ 2, \sqrt{2}, \sqrt{2} \}$$

$$(2) \quad v^2 - s^2 = 2$$

$$\{ \sqrt{13}, 2, 3 \}$$

$$(3) \quad 1 = \frac{s^2}{25} - \frac{v^2}{9}$$

(٥١) اكتب معادلة الدائرة التي نهايتا قطر فيها النقطتان (٢ ، -٣) ، (٤ ، ١)

$$\{ 5 = (s - 3)^2 + (v + 1)^2 \}$$

(٥٢) أوجد احداثيات الرأس والبؤرة ومعادلة الدليل لكل قطع مكافئ من

القطوع المخروطية التالية:

$$(1) \quad v^2 = \frac{1}{2} s$$

$$(2) \quad s^2 = 8s - 2v - 7$$

(٥٣) ما نسبة طول المحور الأكبر الى طول المحور الأصغر في القطع الناقص:

$$\{ 8 : 7 \}$$

$$1 = \frac{s^2}{49} + \frac{v^2}{81}$$

(٥٤) أوجد مركز ونصف قطر الدائرة  $s^2 + v^2 + 4s - 14v + 11 = 0$  صفر

ثم أوجد معادلة الدائرة المتحدة معها بالمركز ونصف قطرها  $\sqrt{53}$



## القطع المخروطية



(٥٥) اكتب معادلة الدائرة التي مركزها م (- ٢ ، ٣) وتمر بالنقطة ن (٤ ، ٥)

$$\{س^2 + ص^2 + ٤س - ٦ص - ٢٧ = صفر\}$$

(٥٦) اذا تقاطع المماس المرسوم للقطع الناقص ٩ س + ٤ ص = ٣٦ مع محور الصادات في النقطة (٠ ، ٦) أوجد احداثيات نقطة التماس.

{ ارشاد: نقطة التماس يمر بها منحنى القطع وميله عندها = ميل المماس }

(٥٧) اكتب:

(١) معادلة القطع المكافئ الذي رأسه (٢ ، ١) ويمر منحناه بالنقطة (٤ ، ٥) ومحوره يوازي محور السينات.

(٢) معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته (٣ ، ١) ويمر منحناه بالنقطة (٠ ، ٥) ومحوره يوازي محور الصادات.

(٥٨) تتحرك النقطة و (س ، ص) في المستوى الديكارتي بحيث أن موضعها في اللحظة  $n \leq ٠$  يتحدد بالمعادلتين:  $س = جتا n - جا n$  ،  $ص = جا n < ن$

جد معادلة مسار (المحل الهندسي) للنقطة و ونوعه من القطوع المخروطية.

{ ارشاد: أوجد س<sup>٢</sup> أولاً وذلك بالتربيع }

(٥٩) اكتب معادلة القطع الناقص الذي يفسر كلاً من المستقيمين:

$$س = ٣ ، س = ١٣ ، ص = - ١ ، ص = ٧$$

{ ارشاد: الرسم هام جداً }

(٦٠) ما الفرق بين طولي المحورين الأكبر والأصغر للقطعين الناقصين التاليين:

$$(١) ١ = \frac{ص^2}{١٤٤} + \frac{س^2}{٢٥}$$

$$(٢) ١ = \frac{ص^2(١ - ص)}{٣٦} + \frac{س^2(٢ + س)}{١٦}$$



### القطوع المخروطية

(٦١) اذا علمت أن مساحة القطع الناقص  $\frac{ص^2}{١٦} + \frac{س^2}{٨١} = ١$  تُعطى بالمقدار  $\pi$  أ ب وحدة مساحة:

$$(١) \text{ ما مساحة القطع الناقص } \frac{ص^2}{١٦} + \frac{س^2}{٨١} = ١$$

(٢) ما معادلة القطع الناقص الذي رأساه  $(٠, ٥)$  ،  $(٠, -٥)$  ،

ومساحته  $٢٠ \pi$  وحدة مساحة.

(٦٢) اذا كان طول المحور الأكبر لقطع ناقص يساوي مثلي طول محوره الأصغر، احسب قيمة اختلافه المركزي "هـ"

(٦٣) اكتب معادلة القطع الزائد الذي مركزه  $(٢, -٣)$  وأحد رأسيه  $(٥, -٣)$  واختلافه المركزي هـ = ٢ وارسم منحناه أيضاً.

(٦٤) أوجد عناصر القطع الزائد  $\frac{ص^2}{١٦} - \frac{س^2}{١٠} = ١٧$  = صفر

(٦٥) ما النسبة بين البعد البؤري والمحور القاطع لكل من القطعين الزائدين التاليين:

$$(١) \frac{ص^2}{١٤٤} - \frac{س^2}{٢٥} = ١$$

$$(٢) \frac{ص^2(٥ - ٥)}{٢٥} - \frac{س^2(٤ + ٤)}{٨١} = ١$$

(٦٦) تتحرك نقطة ن (س ، ص) بحيث يتحدد موقعها بالمعادلتين:

$$س = جا هـ + جتا هـ ، ص = ٢ \sqrt{جا هـ جتا هـ} \text{ حيث هـ زاوية متغيرة بين أن}$$

النقطة ن تتحرك على منحنى قطع زائد.

{ارشاد: ربّع ثم عوّض}





(٦٧) أوجد:

(١) نصف قطر الدائرة  $س^2 + ٤س + ٦ص - ١٢ = \text{صفر}$

(٢) معادلة القطع المكافئ الذي رأسه  $(٠, ٠)$  وبؤرته  $(٠, ٢)$

(٣) معادلة دليل القطع المكافئ  $س^2 - ٤س - ٤ = \text{صفر}$

(٤) الاختلاف المركزي للقطع الناقص  $١ = \frac{ص^2}{١٦٩} + \frac{س^2}{١٤٤}$

(٥) بؤرتي القطع الناقص  $٦ = ٢س^2 + ٢ص$

(٦) إحداثيي رأس القطع المكافئ  $(س - ١) + ٨(ص + ٢) = \text{صفر}$

(٦٨) أي من المعادلات التالية تمثل دائرة؟ وكم نصف قطرها؟

(١)  $١ = \frac{ص^2}{٩} + \frac{س^2}{٤}$

(٢)  $١ = \frac{ص^2}{٩} + \frac{س^2}{٩}$

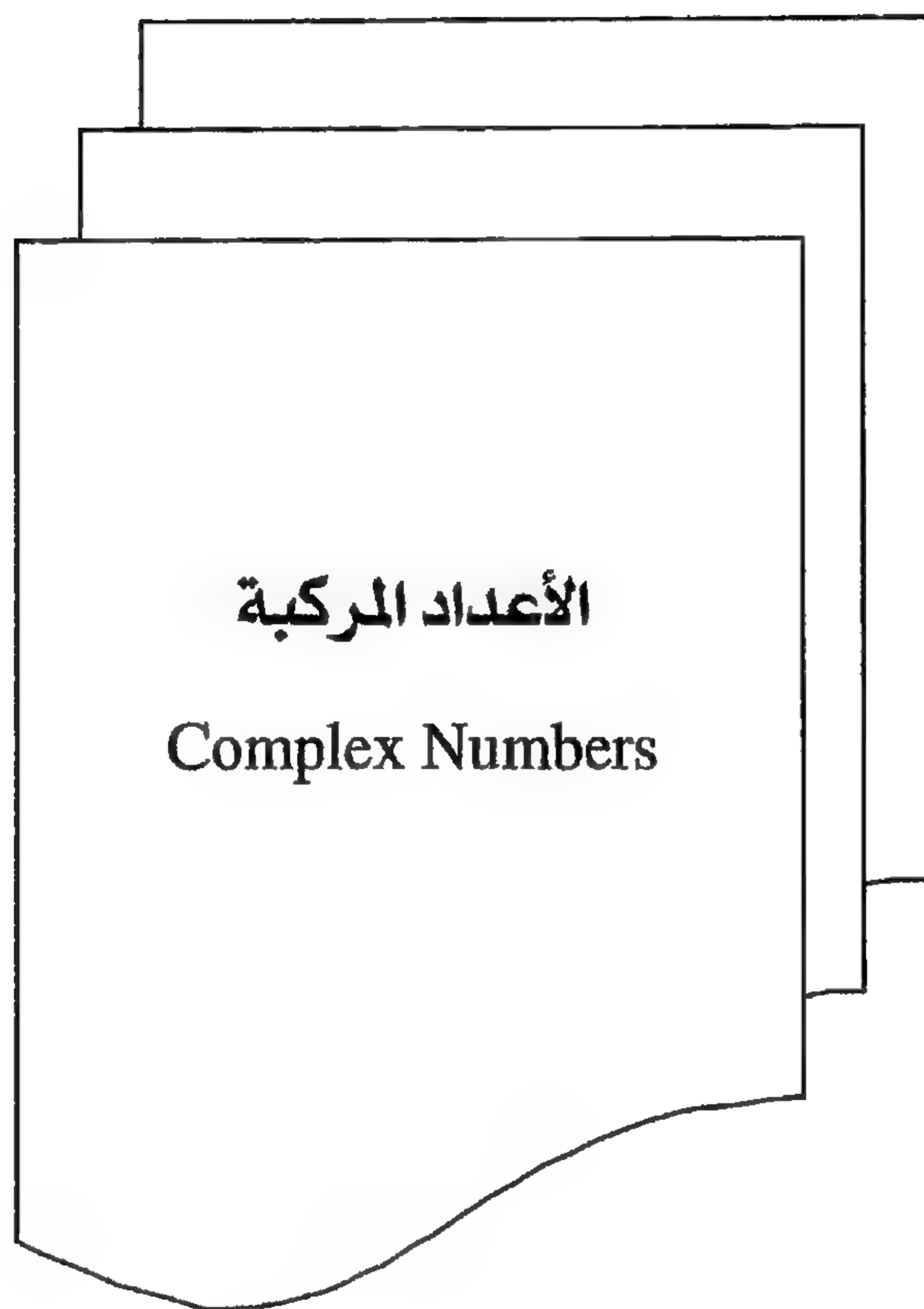
(٣)  $١ = \frac{ص^2}{٩} - \frac{س^2}{٩}$

(٦٩) أوجد:

(١) معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل وتمر بالنقطة  $(٥, -٣)$

(٢) معادلة الدائرة التي مركزها  $(٥, -٣)$  وتمر بنقطة الأصل.





## الأعداد المركبة



من المعلوم وفي حقل الأعداد الحقيقية (ح ، + ، ×) أن:

$$1 = \sqrt{1} \quad , \quad \text{حيث } 1 \in \mathbb{R}$$

$$2 = \sqrt{4} \quad , \quad \text{حيث } 2 \in \mathbb{R}$$

$$3 = \sqrt{9} \quad , \quad \text{حيث } 3 \in \mathbb{R}$$

وهكذا..

والآن لو طرحنا هذا السؤال:

ما قيمة كل من  $1 - \sqrt{1}$  ،  $4 - \sqrt{4}$  ،  $9 - \sqrt{9}$  ؟

لما استطاعت مجموعة الأعداد الحقيقية ح أن تزودنا بالجواب، كونها لا تضم مثل هذا الأعداد، لذا فنحن بحاجة ماسة للتعرف على مجموعة أخرى من الأعداد "تسمى الأعداد المركبة" لأنها هي التي تستطيع أن تجيب عن سؤالنا السابق.

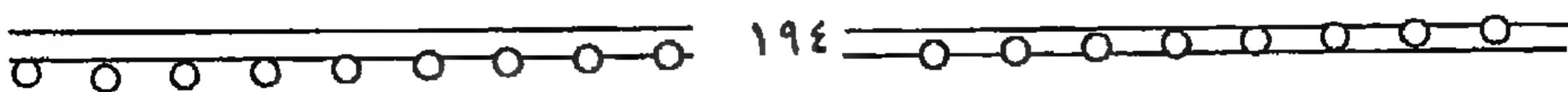
ومن خلال السياق:

(٢٤ - ١) العدد المركب Complex Number:

سنلقي الضوء مرة أخرى على المعادلات التربيعية وعلى صورتها العامة:

أ س<sup>٢</sup> + ب س + ج = صفر، أ ≠ صفر بالذات، كونها مدخلاً مناسباً لدراسة ومناقشة العدد المركب وخصائصه كما يظهر في هذا البيان:

ان مميز المعادلة التربيعية (أ س<sup>٢</sup> + ب س + ج = صفر) يكتب على الصورة ب<sup>٢</sup> - ٤ أ ج  
فإذا أن يكون أكبر من أو يساوي الصفر، وبالرموز ب<sup>٢</sup> - ٤ أ ج ≥ صفر، عندها  
يوجد للمعادلة جذران حقيقيان في حقل الأعداد الحقيقية (ح ، + ، ×) مختلفان  
عندما ب<sup>٢</sup> - ٤ أ ج < صفر ومتساويان عندما ب<sup>٢</sup> - ٤ أ ج = صفر وكأنهما جذر  
واحد هكذا:



## الأعداد المركبة



يمكن ايجادهما بواسطة القانون العام لحل المعادلات التربيعية:

$$\text{حيث: } s = \left\{ \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right\}$$

$$= \left\{ \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right\}$$

مثال:

أوجد مجموعة الحل للمعادلة التربيعية  $s^2 - 1 = 0$  صفر

نجد المميز أولاً:

$$\text{وبما أن } s^2 + b s + c = 0 \text{ صفر} \Leftrightarrow s^2 - 1 = 0 \text{ صفر}$$

$$\text{فإن } a = 1 \text{ معامل } s^2$$

$$b = 0 \text{ معامل } s \text{ كونها غير موجودة بالمعادلة}$$

$$c = -1$$

$$b^2 - 4ac = (0)^2 - 4(1)(-1) = 4$$

$$\therefore s = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{0 \pm \sqrt{4}}{2} = -1, 1$$

مجموعة الحل للمعادلة  $\{-1, 1\}$  والجذران حقيقيان

مثال:

أوجد مجموعة الحل للمعادلة التربيعية  $s^2 - 6s + 9 = 0$  صفر

نجد المميز أولاً: حيث  $a = 1$

$$b = -6$$

$$c = 9$$

$$b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4(1)(9) = 36 - 36 = 0$$

مجموعة الحل للمعادلة:

$$س = \frac{\sqrt{6} \pm 6}{2} = 3 \text{ جذر حقيقي مكرر وكأنه جذران متساويان.}$$

وأما عندما يكون المميز  $b^2 - 4ac > 0$  صفر عندها يكون للمعادلة جذران ولكن غير حقيقيان وكأنه لا يوجد لهما في حقل الأعداد الحقيقية حل.

كما في المثال:

**مثال:**

أوجد مجموعة الحل للمعادلة التربيعية  $x^2 + 1 = 0$  صفر

نجد المميز أولاً: حيث  $a = 1$

ب = صفر كون س غير موجودة بالمعادلة

$$1 = 2$$

$$\therefore 1^2 - 4 \times 1 \times 1 + 1^2 = 0 \quad (\text{صفر})$$

**وباستخدام قانون حل المعادلات التربيعية العام:**

$$\frac{-\sqrt{4}}{2} = \frac{-\sqrt{4} \pm \text{صفر}}{2} = \frac{-\sqrt{4} \pm 0}{2} = \frac{-2 \pm 0}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

وبما أن  $\sqrt{-4}$  ليس عدد حقيقي لذا فإن مجموعة الحل للمعادلة  $x^2 + 1 = 0$  صفر في حقل الأعداد الحقيقية هو  $\phi = \{ \}$  أي لا يوجد لها حل في حقل الأعداد الحقيقية.

لذا كان لا بُد من ايجاد أعداد مجموعة عددية أخرى أكبر اتساعاً من ح  
لتستوعب أعداداً أخرى غير موجودة في ح مثل  $\sqrt{-1}$  في المثال وبشكل عام  $\sqrt{a}$ ،  $a \notin \mathbb{H}$ .

فكانت مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$  وكان حقل الأعداد المركبة  $(\mathbb{C}, +, \times)$  والذي نحن بصدد دراسة هذه الأعداد وهذا الحقل ومناقشته في هذه السطور.

### الأعداد المركبة



بما أن  $\sqrt{-1}$  ليس عدد حقيقي كونه لا يوجد عدد في حقل الأعداد الحقيقية مربعه  $= -1$ .

لذلك سنرمز للعدد  $\sqrt{-1}$  بالرمز  $i$  ويسمى العدد التخيلي، وهذا العدد  $i$  بالذات هو اللبنة الأساسية في بناء مجموعة الأعداد المركبة  $E$ ، وتشبيد حقل الأعداد المركبة ( $E$ ،  $+$ ،  $\times$ ) كما ستري!!!

لنبدأ بالعدد  $i = \sqrt{-1}$  انه يحقق المعادلة التالية:

$i^2 = -1$  بعد تربيع الطرفين، ونعيد ونكرر كثيراً قولنا بأن  $i$  ليس عدد حقيقي على الاطلاق، ومع ذلك فإنه يحقق بعض خواص الأعداد الحقيقية كما سنرى بعد قليل.



ولتناقش قوى ت كما يلي:

(ت) = ١ حسب قوانين الأسس وهذا عدد حقيقي

(ت) = ١ وهذا عدد تخيلي

(ت) = ٢ (ت) = ٢ (١ -) = ١ وهذا عدد حقيقي

(ت) = ٢ (ت) = ٢ (١ -) = ١ وهذا عدد تخيلي

(ت) = ٤ (ت) = ٢ (ت) = ٢ (١ -) (١ -) = ١ بدأ تكرار العدد ١ وهذا عدد حقيقي

(ت) =

(ت) = ٥ (ت) = ٤ (ت) = ٣ (١ -) = ٢ بدأ تكرار العدد ت وهذا عدد تخيلي

وهكذا...

وكان: (ت) = ٦ (ت) = ٥ (ت) = ٤ (ت) = ٣ (ت) = ٢ (ت) = ١

وكذلك: (ت) = ٧ (ت) = ٦ (ت) = ٥ (ت) = ٤ (ت) = ٣ (ت) = ٢ (ت) = ١

وكذلك: (ت) = ٨ (ت) = ٧ (ت) = ٦ (ت) = ٥ (ت) = ٤ (ت) = ٣ (ت) = ٢ (ت) = ١

ثم كذلك: (ت) = ٩ (ت) = ٨ (ت) = ٧ (ت) = ٦ (ت) = ٥ (ت) = ٤ (ت) = ٣ (ت) = ٢ (ت) = ١

وكان قوى ت انقسمت الى أربعة صفوف للتكافؤ كما في الأعداد

الحقيقية وأنتجت أعداداً حقيقية مثل ١ ، - ١ وأعداد تخيلية مثل ت ، - ت

لذا فإن كلاً من قوى ت ينتج عنصراً واحداً من عناصر المجموعة { ١ ، ت

، - ١ ، - ت } حسب القانون التالي: (ت)<sup>n</sup> = ت<sup>n</sup> حيث n ∈ ص، ر = { ٠ ، ١ ،

٢ ، ٣ } فقط.

وعملية البيان تتم اجرائياً بأن تقسم قوة ت على ٤ ومهما كانت قوة ت فإن

الجواب دائماً يساوي ت<sup>n</sup> حيث ر هو باقي القسمة كما يلي:

أوجد:  $1 = \dot{v}(t) = v^0(t)$

$$t = {}^1(t) = {}^{1202}(t)$$

$$1 - = {}^2(t) = {}^{1221}(t)$$

$$t = t^2 = t^3 \dots$$

ويمكن اختصار القسمة هكذا:

$${}^2_t \times {}^{180}_{(2)}(t) = {}^2_t \times {}^{(180)}_2 t = {}^{723}_{(t)}(t)$$

$$t = {}^2t = {}^2t \times 1 = {}^2t \times {}^{180}(1) =$$

وكذلك  $(t) = t^{(0)} = t^{(5)} = \dots = 1 = t^{(0)}$  وهكذا.....

وهكذا فإننا نرى أن قوى ت غريبة حيث تعطي تارة عدداً حقيقياً {- ١ ، ١} وتارة عدداً تخيلياً {- ت ، ت}.

من الملاحظ أن النظام الرياضي  $\{1, t, -1, -t\}$  ،  $*$  زمرة

### تبدیلیہ مکذا:

×	۱	ت	۱ -	ت -
۱	۱	ت	۱ -	ت -
ت	ت	۱ -	ت -	۱
۱ -	۱ -	ت -	۱	ت
ت -	ت -	۱	ت	۱ -

والعنصر المحايد للزمرة هو العدد "١"

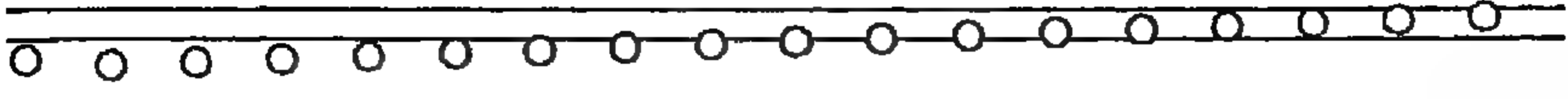
وتبديلية لأن  $t \times 1 = 1 \times t = t$

$$(t) (t -) = (t -) (t) = (t -) = t^2 = 1 \text{ وهكذا..}$$

وليس هذا فحسب، بل ان العدد  $\sqrt{-1}$  مكن من كتابة كل جذر

ترييعى لعدد حقيقي سالب بدلالة  $t$  هكذا:

## الأعداد المركبة



$$2 = \sqrt{-1} \times \sqrt{-4} = \sqrt{(-1) \times (-4)} = \sqrt{4} = 2$$

$$\text{وكذلك } 3 = \sqrt{-1} \times \sqrt{-9} = \sqrt{(-1) \times (-9)} = \sqrt{9} = 3$$

وبصورة عامة إذا كان  $A \leq 0$  صفر فإن  $\sqrt{A} = \sqrt{(-1) \times (-A)} = \sqrt{-1} \times \sqrt{-A}$   
 (موجب) (سالب)

والتفسير اللغوي:  $\sqrt{\text{العدد الحقيقي السالب}} = \sqrt{\text{العدد الحقيقي الموجب}} \times i$

ومثال:

$$4 = \sqrt{-1} \times \sqrt{-16} = \sqrt{(-1) \times (-16)} = \sqrt{16} = 4$$

$$\text{وكذلك } 5 = \sqrt{-1} \times \sqrt{-25} = \sqrt{(-1) \times (-25)} = \sqrt{25} = 5$$

وهكذا:

والآن نعرّف العدد المركب:

العدد المركب  $E$  هو عدد على الصورة  $A + Bi$  حيث  $A, B \in \mathbb{R}$

ويسمى "أ" الجزء الحقيقي للعدد المركب  $E$ .

ويسمى "ب" الجزء التخيلي للعدد المركب  $E$ .

وبناء على هذا التعريف فإن جميع الأعداد التالية هي أعداد مركبة يمكن

كتابتها على الصورة  $A + Bi$  هكذا:

فالعدد الطبيعي 5 هو عدد مركب كونه  $5 + 0i$

والعدد الكلي صفر هو عدد مركب كونه  $0 + 0i$

والعدد الصحيح -6 هو عدد مركب كونه  $-6 + 0i$

والعدد النسبي  $\frac{3}{4}$  هو عدد مركب كونه  $\frac{3}{4} + 0i$

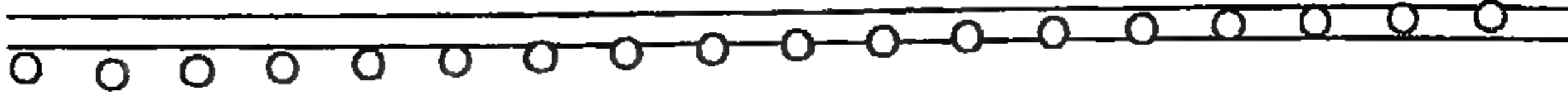
والعدد الحقيقي  $\sqrt{2}$  هو عدد مركب كونه  $\sqrt{2} + 0i$

ثم العدد التخيلي  $i$  هو عدد مركب كونه  $0 + 1i$

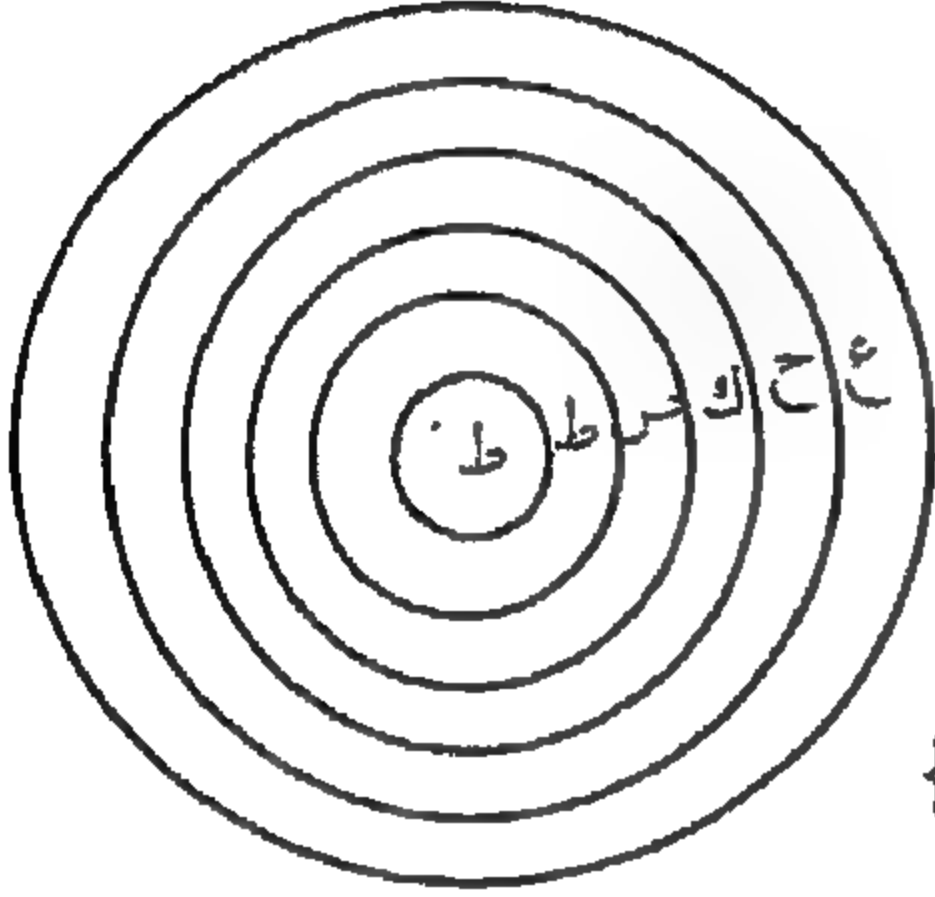




## الأعداد المركبة



وكما تلاحظ فإن جميع الأعداد في المجموعات العددية الست يمكن كتابتها على صورة  $ع = أ + ب ت$  كعدد مركب، فإذا كان ل عدد حقيقي. فإن  $ل = ل + ٠ ت$  كعدد مركب، أي أن المجموعات العددية الخمس هي مجموعات جزئية من مجموعة الأعداد المركبة كما يمثلها ويجمعها شكل فن التالي حيث:



$$ط^* = \text{الأعداد الطبيعية} = \{١, ٢, ٣, \dots\}$$

$$ط = \text{الأعداد الكلية} = \{٠, ١, ٢, \dots\}$$

$$ص = \text{الأعداد الصحيحة} = \{٠, \pm ١, \pm ٢, \dots\}$$

$$ك = \text{الأعداد النسبية} = \left\{ \frac{أ}{ب}, أ \in ص, ب \in ص, ب \neq ٠ \right\}$$

$$ح = \text{الأعداد الحقيقية} = \{ \text{الأعداد النسبية وغير النسبية} \}$$

$$\text{مثل } \pi, \sqrt{٢}, \dots$$

$$ع = \text{الأعداد المركبة} = \{ \text{الأعداد الحقيقية والتخيلية حيث} \}$$

$$\text{تمثل بالعدد } أ + ب ت, ت^٢ = -١ \}$$

مثال:

اكتب الأعداد الآتية:  $-٧, \sqrt{-٤٩}, \sqrt{-١١}, ٢ + \sqrt{-١٦}$  على

صورة  $أ + ب ت$

الحل:

$$-٧ = -٧ + ٠ ت$$

$$\sqrt{-٤٩} = \sqrt{-١ \times ٤٩} = \sqrt{-١} \times \sqrt{٤٩} = \sqrt{-١} \times ٧ = ٧\sqrt{-١} = ٧ ت$$

$$\sqrt{-١١} = \sqrt{-١ \times ١١} = \sqrt{-١} \times \sqrt{١١} = \sqrt{-١} \times ١ = \sqrt{-١} = ١ ت$$

$$٢ + \sqrt{-١٦} = ٢ + \sqrt{-١ \times ١٦} = ٢ + \sqrt{-١} \times \sqrt{١٦} = ٢ + \sqrt{-١} \times ٤ = ٢ + ٤ ت$$



## الأعداد المركبة



(٢٤ - ٢) العمليات الرياضية على الأعداد المركبة:

وتشمل:

(i) عملية المساواة Equally في حقل الأعداد المركبة:

تساوي الأعداد المركبة إذا تساوت الأجزاء الحقيقية فيها ، والأجزاء التخيلية أيضاً.

$$\text{أي أن } أ + ب ت = ج + د ت$$

إذا وإذا فقط  $أ = ج$  (تساوي الأجزاء الحقيقية)

$ب = د$  (تساوي الأجزاء التخيلية)

مثال:

إذا كان  $٣ س + ٤ ت = ٨ + ٢ ص$  لكل  $س$  ،  $ص$   $\exists$  ح أوجد قيم  $س$  ،  $ص$  التي تحقق المعادلة أعلاه.

الحل:

(تساوي الأجزاء الحقيقية)

$$٣ س = ٢$$

$$\therefore س = \frac{٢}{٣}$$

(تساوي الأجزاء التخيلية)

$$\text{وكذلك } ٨ = ٤ ص$$

$$ص = \frac{١}{٢}$$

$\therefore$  قيم  $س$  ،  $ص$  هي  $\left\{ \frac{٢}{٣} , \frac{١}{٢} \right\}$

مثال:

ما قيم  $س$  ،  $ص$  الحقيقية فيما يلي:  $س^٢ - ص^٢ + ٢ س ص ت = ت$





الحل:

نضع الطرف الأيسر على صورة  $أ + ب ت$  هكذا  $٠ + ١ ت$

$$\therefore (س^٢ - ص^٢) + ٢ س ص ت = ٠ + ١ ت$$

ومن تساوي العددين المركبين ينتج أن:

$$س^٢ - ص^٢ = \text{صفر} \quad (١)$$

$$٢ س ص = ١ \quad (٢)$$

وبحل المعادلتين هكذا: "بالتعويض مثلاً"

$$٢ س ص = ١$$

$$\therefore س = \frac{١}{٢ ص} \quad (\text{س موضوع القانون})$$

$$\therefore \left( \frac{١}{٢ ص} \right)^٢ - ص^٢ = \text{صفر}$$

$$\text{ومنها } \frac{١}{٢ ص} = \frac{ص^٢}{١} \quad \text{وبالضرب التبادلي}$$

$$١ = ص^٤ \leftarrow ١ = ص^٤ - ١ = \text{صفر} \quad (\text{وبالتحليل})$$

$$(٢ ص^٢ - ١) (٢ ص^٢ + ١) = \text{صفر}$$

وبما أن ص حقيقية فإن:

$$\text{أو } (٢ ص^٢ - ١) (٢ ص^٢ + ١) = ٠$$

$$\therefore ص = \frac{١}{\sqrt{٢}}, -\frac{١}{\sqrt{٢}}$$

$$\text{وأما ص الحقيقية } = \frac{١}{\sqrt{٢}}, -\frac{١}{\sqrt{٢}}$$

$$س = \frac{١}{٢ ص} = \frac{\sqrt{٢}}{٢} = \frac{١}{\sqrt{٢}} \pm \frac{١}{\sqrt{٢}} \{ \pm \frac{١}{\sqrt{٢}} \} = \frac{١}{٢ ص} = س$$



### الأعداد المركبة



$$\therefore \text{س الحقيقية} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$$

$$\text{وكذلك ص الحقيقية} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$$

### (ii) جمع وطرح الأعداد المركبة:

تتم عملية جمع عددين مركبين بجمع الجزئين الحقيقيين معاً، وجمع الجزئين التخيليين معاً، وكذلك عملية الطرح تتم بطرح الجزئين الحقيقيين، وطرح الجزئين التخيليين هكذا:

$$(أ + ب ت) + (ج + د ت) = (أ + ج) + (ب + د) ت$$

$$\text{وكذلك } (أ + ب ت) - (ج + د ت) = (أ - ج) + (ب - د) ت$$

مثال:

أوجد ناتج:

$$(i) (3 + 5ت) + (2 - 4ت) = (3 + 2) + (5 - 4) ت$$

$$= 5 + ت$$

$$(ii) (5 - 12ت) - (2 - 4ت) = (5 - 2) + (-12 + 4) ت$$

$$= 3 - 8ت$$

أو مباشرة:  $5 - 12ت - 2 + 4ت = 3 - 8ت$  (بعد فك القوس الثاني)

$$\text{وكذلك } 5 + ت = 5 + 0ت + 3 + 0ت = 8 + ت$$

$$\text{وكذلك } 5 - 12ت - 2 + 4ت = 3 - 8ت$$

### (iii) ضرب الأعداد المركبة:

لإيجاد حاصل ضرب عددين مركبين نستخدم قانون التوزيع هكذا:



### الأعداد المركبة



$$(أ + ب ت) (ج د ت) = أ (ج د ت) + ب ت (ج د ت)$$

$$= أ ج + أ د ت + ب ج ت + ب د ت^2$$

$$\text{ولما كانت } ت^2 = -١$$

$$\text{فإن حاصل الضرب } = أ ج + أ د ت + ب ج ت + ب د (-١)$$

$$= (أ ج - ب د) + (أ د + ب ج) ت \text{ (لا داعي لحفظ القانون بل ايجاده هكذا):}$$

مثال:

$$\text{ما حاصل ضرب } (٢ + ٣ ت) (٢ - ج ت) \text{ وعلى صورة } أ + ب ت$$

$$\text{بقانون التوزيع: } (٢ + ٣ ت) (٢ - ٥ ت)$$

$$= ٣ (٢ - ٥ ت) + ٢ (٢ - ٥ ت)$$

$$= ٦ - ١٥ ت + ٤ ت - ١٠ ت^2$$

$$= ٦ - ١٥ ت + ٤ ت + ١٠$$

$$= ١٦ - ١١ ت$$

مثال:

$$\text{أوجد } (١ + ت)^2 \text{ وبصورة } أ + ب ت$$

الحل:

$$(١ + ت)^2 = (١ + ت) (١ + ت) \text{ كحاصل ضرب عددين مركبين}$$

$$= ١ (١ + ت) + ت (١ + ت)$$

$$= ١ + ت + ت + ت^2$$

$$= ١ + ٢ ت + ت^2$$

$$= ٢ ت$$

$$= ٢ + ٠ ت$$



## الأعداد المركبة



(iv) قسمة الأعداد المركبة:

لأجراء عملية قسمة عددين مركبين نحتاج الى مناقشة بعض المفاهيم الأساسية المتعلقة بالعدد المركب  $A + Bt$  التالية:

أولاً: المرافق Conjugate:

مرافق العدد المركب  $E$  ويرمز له بالاشارة  $\bar{E}$

وايجاده هكذا:

مرافق العدد المركب  $E = A + Bt$  هو  $\bar{E} = A - Bt$  "الاختلاف بالاشارة فقط"

والعكس صواب:

أي مرافق العدد المركب  $A - Bt$  هو العدد المركب  $A + Bt$

وهناك حالات خاصة للمرافق:

مرافق العدد المركب  $E = A + 0t$  هو  $\bar{E} = A - 0t$  "وكأنه نفسه كونه الجزء الحقيقي فقط"

ومرافق العدد المركب  $E = 0 + Bt$  هو  $\bar{E} = 0 - Bt$  "الاختلاف بالاشارة كونه الجزء التخيلي"

مثال:

إذا كان  $E = 6 - 4t$

أوجد  $\bar{E}$

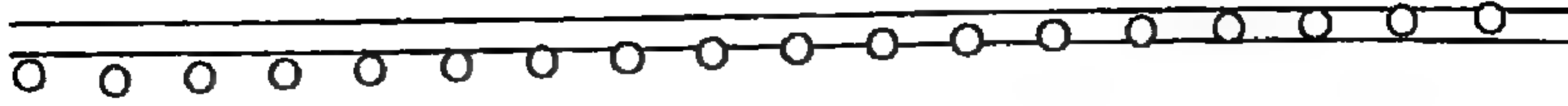
$\bar{E} = 6 + 4t$

مثال:

أوجد مرافق كل من الأعداد التالية:



## الأعداد المركبة



$$١١ - = ١١ \text{ نفسه} \quad \text{الجواب: } ١١ - = ١١$$

$$١١ - = ١١ \text{ نفسه} \quad \text{الجواب: } ١١ - = ١١$$

ثانياً: المقياس Modulus

$$\sqrt{١١} = \sqrt{١١} \quad \text{مقياس العدد المركب } ١١ = \sqrt{١١}$$

مثال:

$$٥ = \sqrt{٢٥} = \sqrt{١٦ + ٩} = \sqrt{٤^2 + ٣^2} = \sqrt{٤^2 + ٣^2} = ٥$$

$$٨ = \sqrt{٦٤} = \sqrt{٨^2 + ٠^2} = \sqrt{٨^2 + ٠^2} = ٨$$

وهكذا...

ثالثاً: المقلوب Inverse

مقلوب العدد المركب  $١١$  أو نظيره الضربي  $\frac{1}{١١}$  والذي يحقق الخاصية التالية:

العدد  $١١$  × نظيره الضربي  $\frac{1}{١١}$  (العنصر المحايد لعملية الضرب)

$$١١ \times \frac{1}{١١} = ١$$

فمقلوب العدد المركب  $١١ = \sqrt{١١}$  هو  $\frac{1}{\sqrt{١١}}$

وحتى نكتب هذا المقلوب بصورة عدد مركب آخر، فإننا نقوم بانطاق مقامه، أي

نضربه بالمرافق للمقام هكذا:

$$\frac{1}{\sqrt{١١}} = \frac{1}{\sqrt{١١}} \times \frac{\sqrt{١١}}{\sqrt{١١}} = \frac{\sqrt{١١}}{١١}$$

$$= \frac{\sqrt{١١}}{١١}$$

مثال:

أوجد مقلوب العدد المركب  $١ - ٣٢$  واكتبه على صورة عدد مركب.

$$\frac{1}{١ - ٣٢} = \frac{1}{١ - ٣٢} \times \frac{١ + ٣٢}{١ + ٣٢} = \frac{١ + ٣٢}{١ - ٣٢}$$

## الأعداد المركبة



الحل:

$$\frac{t^2 + 1}{(1 - t)^2} = \frac{t^2 + 1}{t^2 + 1} \times \frac{1}{1 - t}$$

$$t \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{t^2 + 1}{10} = \frac{t^2 + 1}{9 + 1} =$$

وكذلك مقلوب العدد المركب  $t$  هو  $\frac{1}{t}$

$$-t = \frac{-t}{1} = \frac{-t}{(1 - t)^2} = \frac{-t}{(t - 1)^2} = \frac{-t}{t - 1} \times \frac{1}{t}$$

والآن نعود الى كيفية اجراء عملية قسمة الأعداد المركبة هكذا:

لاجراء عملية قسمة العدد المركب  $16$  على  $26 \neq 0$

فإننا نضع  $\frac{16}{26}$  ثم نضرب مقامه بالمرافق هكذا:

$$\frac{16}{26} \times \frac{26}{26} =$$

فينتج خارج القسمة على صورة عدد مركب هكذا:

مثال:

أوجد خارج قسمة  $\frac{t + 1}{t - 1}$  وضعه على صورة عدد مركب  $A + Bt$ .

الحل:

$$\frac{t^2 + 1}{(1 - t)^2} = \frac{(t + 1)(t + 1)}{t^2 - 1} = \frac{t + 1}{t + 1} \times \frac{t + 1}{t - 1}$$

$$t = \frac{t^2}{2} = \frac{t^2 + 1 - 1}{2} =$$

وكذلك

$$\frac{t^2 + 1 - 1}{2} = \frac{(t - 2)(t - 3)}{t^2 - 1} = \frac{t - 2}{t - 1} \times \frac{t - 3}{t + 1}$$

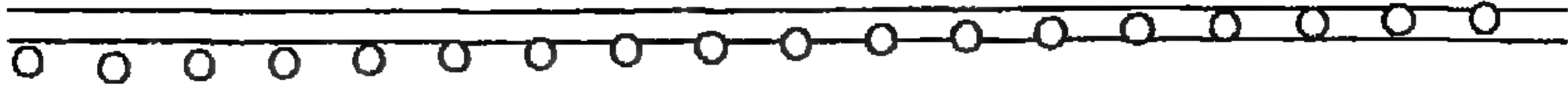
$$= \frac{11}{25} - \frac{2}{25} = \frac{11 - 2}{25} =$$

وهكذا...





### الأعداد المركبة



وكان عملية قسمة العدد المركب  $١٤$  على  $٢٤$  =  $\frac{١}{٢٤} \times ١٤$

= العدد المركب  $١٤$  × مقلوب العدد المركب  $٢٤$

وهذا التعميم لعملية القسمة في حقل الأعداد المركبة يماثل تماماً لعملية القسمة في حقل الأعداد الحقيقية.

مثال:

احسب ما يلي:

$$(i) \text{ مرافق العدد } - ١١ - ١٣ = - ١١ - ١٣ = ١٣ + ١١ \text{ ت}$$

$$(ii) \text{ مقياس العدد } - ١٢ + ٥ = - | ١٢ + ٥ | = ١٢ + ٥ = ١٦٩ \sqrt{١٤٤ + ٢٥} = ١٣$$

$$(iii) \text{ مقلوب العدد } ٥ - ٦ = \frac{٥ + ٦}{٢٥ - ٣٦} = \frac{٥ + ٦}{٥ + ٦} \times \frac{١}{٥ - ٦} = \frac{٥ + ٦}{٢٥ - ٣٦}$$

$$= \frac{٥}{٦١} + \frac{٦}{٦١} = \frac{٥ + ٦}{٦١} = \frac{٥ + ٦}{٢٥ - ٣٦}$$

(٢٤ - ٣) الجذور التربيعية للأعداد المركبة:

لو عدنا الى حقل الأعداد الحقيقية وأردنا حل المعادلة التربيعية  $س^٢ - أ = ٠$  صفر

حيث  $أ \in \mathbb{R}^*$  لوجدنا أن حلها يكون:

$$(س + \sqrt{أ}) (س - \sqrt{أ}) = ٠ \text{ صفر}$$

$$\therefore س = \sqrt{أ} ، س = -\sqrt{أ}$$

عندها نقول أن الجذور التربيعية للعدد الحقيقي الموجب  $أ$  هما  $\pm \sqrt{أ}$

مثال:

$$س^٢ - ٦٤ = ٠ \text{ صفر} \leftarrow (س + ٨) (س - ٨) = ٠ \text{ صفر}$$

$$\therefore س = ٨ ، س = -٨$$

$\therefore$  الجذور التربيعية للعدد ٦٤ هما  $\pm \sqrt{٦٤} = \pm ٨$  وهما عدداً حقيقيان



## الأعداد المركبة



وعندما  $s^2 = \text{صفر}$  ،  $a = \text{صفر}$  وهو عدد حقيقي

فإن للمعادلة جذر واحد حقيقي هو صفر.

والسؤال الآن: ماذا لو كان  $a \in \mathbb{C}$  ؟

مثال:

حل المعادلة:  $s^2 + 25 = \text{صفر}$

$$s^2 = -25$$

$$s = \pm \sqrt{-25}$$

في حقل الأعداد الحقيقية ( ح ، + ، ٠ ) لا يوجد جذور تربيعية للعدد السالب، وإنما نقف الآن في حقل الأعداد المركبة ( ع ، + ، ٠ ) لنجد  $\pm \sqrt{-25}$  فنقول  $s^2 + 25 = \text{صفر}$  تحلل هكذا في حقل الأعداد المركبة ( ع ، + ، ٠ ) فقط.

$$s^2 - 25 = \text{صفر} \quad \text{لأن} \quad t^2 = -1$$

$$= (s - 5)(s + 5) = \text{صفر}$$

$$\therefore s = 5 , -5$$

فالجذور للمعادلة  $s^2 + 25 = \text{صفر}$  هي  $\pm 5t$

$$\text{أي أن} \quad \pm 5t = \pm \sqrt{-25}$$

$$\text{كان} \quad \pm \sqrt{-25} = \pm \sqrt{-1 \times 25} = \pm 5\sqrt{-1} = \pm 5t$$

وبشكل عام اليك هذا المثال:

مثال:

أوجد الجذور التربيعية للعدد المركب  $8 + 6t$



الأعداد المركبة



نفرض أن  $\sqrt{6+8} = t + s$  ، لكل  $s$  ،  $t \in \mathbb{C}$

وبتربيع الطرفين

$$(s + t)^2 = 6 + 8$$

$$s^2 + 2st + t^2 = 6 + 8$$

$$s^2 + 2st + t^2 = (1 - s)^2 + 8$$

$$s^2 + 2st + t^2 = s^2 - 2s + 1 + 8$$

$$(s^2 - s^2) + (2st + 2s) + (t^2 - 1) = 0$$

$$\therefore s^2 - s^2 = 8 - 2s \quad (1)$$

$$2s = 8 - s^2 \quad (2) \quad \text{وبحل المعادلتين وإيجاد قيم } s, \text{ الحقيقية}$$

$$s = 3$$

$$s = \frac{3}{s}$$

$$\therefore 8 = s^2 - \left(\frac{3}{s}\right)^2$$

$$s^2 \left(8 = s^2 - \frac{9}{s^2}\right)$$

$$9 - 8s^2 = s^4$$

$$s^4 + 8s^2 - 9 = 0$$

$$(s^2 + 9)(s^2 - 1) = 0$$

وبما أن  $s$  ،  $t$  حقيقتان فإن:

$$s^2 - 1 = 0$$

$$(s + 1)(s - 1) = 0$$

$$s = 1, -1$$



## الأعداد المركبة



$$ص = \frac{٣}{١} = ٣ ، \quad -٣ = \frac{٣}{١} -$$

$$\therefore س + ص = ١ + ٣ = ٤$$

$$\text{وكذلك } -٣ - ١ = -٤$$

$$\therefore \sqrt{٨ + ٦} = \pm (٣ + ١) = ٤$$

مثال:

أوجد الجذور التربيعية للعدد ت

$$ع = ١ + ٠ = ١$$

$$(س + ص = \sqrt{١ + \text{صفر}})$$

$$س^٢ - ص^٢ = ٢ \times س \times ص = ١ + \text{صفر}$$

$$\therefore س^٢ - ص^٢ = \text{صفر}$$

وبحل المعادلتين وإيجاد قيم س ، ص الحقيقية

$$٢ س ص = ١$$

$$ص = \frac{١}{٢ س}$$

$$س^٢ - \left(\frac{١}{٢ س}\right)^٢ = \text{صفر}$$

$$٤ س^٤ - (س^٢)^٢ = \frac{١}{٢ س^٤} = \text{صفر}$$

$$٤ س^٤ - ١ = \text{صفر}$$

$$(٢ س^٢ - ١)(٢ س^٢ + ١) = \text{صفر}$$

ولإيجاد قيم س الحقيقية نكتفي بـ:

$$(٢ س^٢ - ١)(٢ س^٢ + ١) = \text{صفر}$$



## الأعداد المركبة



$$س = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\frac{2}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{1}{س^2} \quad \text{لكن ص}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\frac{2}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{1}{س^2} \quad \text{وكذلك ص}$$

$$\therefore س + ص ت = \pm \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) ت$$

$$\therefore \sqrt{ت} = \pm \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) ت$$

مثال:

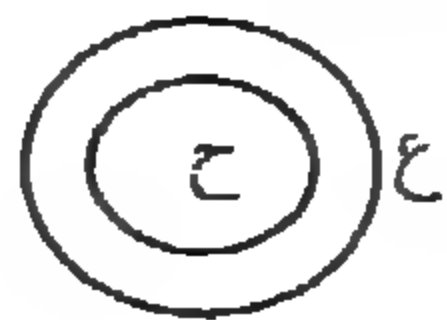
أوجد الجذور التربيعية للعدد - ١٠٠

$$\text{مباشرة} \quad \sqrt{-100} = \sqrt{-1 \times 100} = \sqrt{-1} \times \sqrt{100} = \pm 10 \sqrt{-1}$$

(٢٤ - ٤) حل المعادلات التربيعية في حقل الأعداد المركبة:

كان للمعادلة التربيعية  $أس^2 + بس + ج = ٠$  صفر ، أ  $\neq$  صفر ، ب ، ج ، أ  
أعداد حقيقية حل أو حلان في مجموعة الأعداد الحقيقية عندما كان المميز  $ب^2 - ٤أ$   
ج  $\leq$  صفر وكان لا يوجد لها حل في حقل الأعداد الحقيقية عندما كان المميز  
ب<sup>٢</sup> - ٤أ  $>$  صفر (سالب) وكانت يومذاك مجموعة الحل لها  $\emptyset = \{ \}$  في حقل  
الأعداد الحقيقية فقط.

وأما الآن وبعد توسيع مجموعة الأعداد الحقيقية الى مجموعة الأعداد



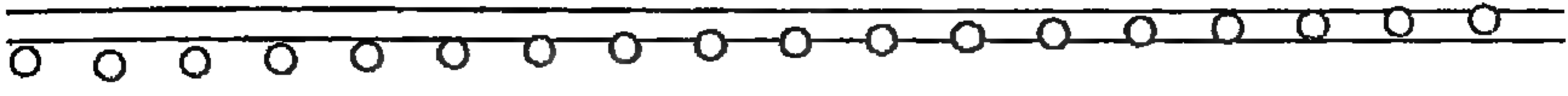
المركبة والتي تحتويها كما في الشكل.

فإن للمعادلة التربيعية

$$أس^2 + بع + ج = ٠ \quad \text{صفر} \quad \text{وبعد استبدال س كعدد حقيقي بـ ع كعدد مركب.}$$



## الأعداد المركبة



حل موجود مهما كانت اشارة المميز ب<sup>٢</sup> - ٤ أ ج سواء أكانت سالبة أو صفر أو موجبة كما يلي:

بإيجاز شديد ومفيد يوجد في حقل الأعداد المركبة حلول للمعادلة التربيعية  
 $أ ع^٢ + ب ع + ج = صفر$  وعلى شكل أعداد مركبة، ويمكن إيجاد هذه الحلول  
 بالقانون:

$$ع = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤ أ ج}}{٢} \quad \text{لكل } أ ، ب ، ج \in ح ، ع \in \text{مجموعة الأعداد المركبة.}$$

ودائماً يوجد للمعادلة حلان مركبان كما يلي:

مثال:

حل المعادلة  $ع^٢ + ٢ ع + ٢ = صفر$  في حقل الأعداد المركبة

الحل:

بما أن  $أ ع^٢ + ب ع + ج = صفر$

$$١ ع^٢ + ٢ ع + ٢ = صفر$$

$$\therefore أ = ١ ، ب = ٢ ، ج = ٢$$

$$ع = \frac{-٢ \pm \sqrt{٢^٢ - ٤ \times ١ \times ٢}}{٢} = \frac{-٢ \pm \sqrt{٤ - ٨}}{٢} = \frac{-٢ \pm \sqrt{-٤}}{٢}$$

$$= \frac{-٢ \pm ٢i}{٢} = -١ \pm i$$

$\therefore$  مجموعة الحل للمعادلة:  $\{-١ - i ، -١ + i\}$

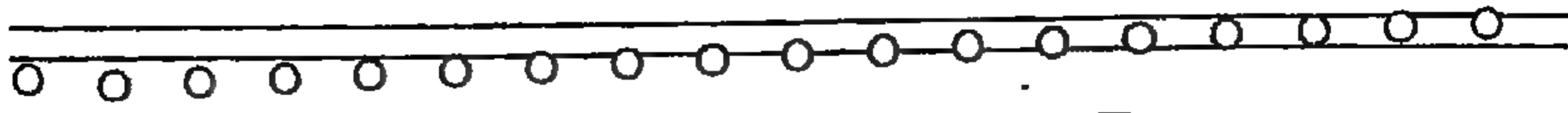
مثال:

حل المعادلة  $ع^٢ + ٢ ع + ٣ = صفر$  في حقل الأعداد المركبة

$$\text{بما أن } أ = ١ ، ب = ٢ ، ج = ٣$$



### الأعداد المركبة



$$\frac{\sqrt{5-2\pm 2}}{4} = \frac{\sqrt{20-2\pm 2}}{4} = \frac{\sqrt{3 \times 2 \times 4 - 2\pm 2}}{2 \times 2} = \text{فإن ع}$$

$$= \frac{\sqrt{5} \pm \frac{1}{2}}{2} = \frac{\sqrt{5} \pm 1}{2}$$

$$\text{فالجذران } \left\{ \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} \right\} \text{ ت ، } \left\{ \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} \right\} \text{ ت}$$

ولو تأملنا الجذرين لوجدنا:

(i) أحدهما مرافق الآخر:

$$\text{أي أن } \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} \text{ ت هو مرافق } \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} \text{ ت والعكس صواب.}$$

وبشكل عام وفي حقل الأعداد المركبة بالذات إذا كان مميز المعادلة:

أ ع<sup>2</sup> + ب ع + ج = صفر لكل أ ≠ صفر ، ب ، ج ، صفر ، أصغر من صفر (سالب)  
يكون الجذران مترافقان، فإذا كان س + ص ت أحد الجذرين فالجذر الآخر هو  
س - ص ت لكل س ، ص ت والعكس صواب.

$$(ii) \text{ مجموع الجذرين } \left( \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} \right) + \left( \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} \right) \text{ ت}$$

$$= 1 + 1 \text{ ت} = 1 - \text{عدد حقيقي} = \frac{2}{2} = \frac{ب}{أ} = 1 -$$

$$\therefore \text{ مجموع الجذرين للمعادلة أ ع<sup>2</sup> + ب ع + ج = صفر يساوي } -\frac{ب}{أ}$$

(هذه الخاصية موجودة في الأعداد الحقيقية)

$$\text{وحاصل ضربيهما } \left( \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} \right) \left( \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} \right) \text{ ت قانون التوزيع}$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} \right) \left( \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} \right) \text{ ت} = \frac{1}{2} \left( \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} \right) \left( \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} \right) \text{ ت}$$

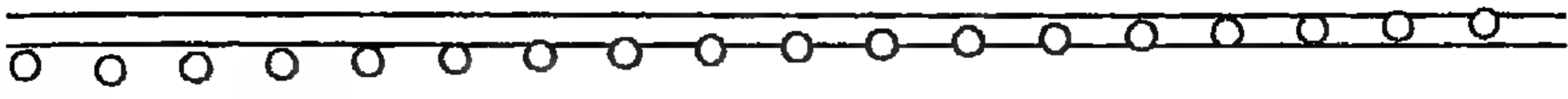
$$= \frac{1}{4} \left( \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} \right) \left( \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} \right) \text{ ت} = \frac{1}{4} \left( \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} \right) \left( \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} \right) \text{ ت}$$

$$= \frac{1}{4} \left( \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} \right) \left( \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} \right) \text{ ت} = \frac{1}{4} \left( \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} \right) \left( \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} \right) \text{ ت} = \frac{1}{4} \left( \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} \right) \left( \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} \right) \text{ ت}$$

(هذه الخاصية موجودة في الأعداد الحقيقية)



## الأعداد المركبة



من هذه الخصائص بالذات يمكن تكوين المعادلة التربيعية:

أ ع<sup>٢</sup> + ب ع + ج = صفر ذات المعاملات (أ ، ب ، ج) الحقيقية اذا علم جذر مركب غير حقيقي فقط هكذا:

المعادلة التربيعية ع<sup>٢</sup> - (مجموع الجذرين) ع + حاصل ضربيهما = صفر

هذه العملية تماثل تركيب المعادلة التربيعية:

"س" - (مجموع الجذرين) س + حاصل ضربيهما = صفر في حقل الأعداد الحقيقية تماماً.

مثال:

كُون المعادلة التربيعية = أ ع<sup>٢</sup> + ب ع + ج = صفر

اذا علمت أن العدد المركب - ٢ + ٥ ت هو أحد جذورها.

الحل:

الجذر الآخر هو مرافقة - ٢ - ٥ ت

المعادلة التربيعية:

$$ع^٢ - (٢ - ٥ ت + ٢ + ٥ ت) ع + (-٢ - ٥ ت)(-٢ + ٥ ت) = صفر$$

$$ع^٢ + ٤ ع + (-٤ - ٢٥ ت) = صفر$$

$$ع^٢ + ٤ ع + (-٤ - ٢٥ \times ١) = صفر$$

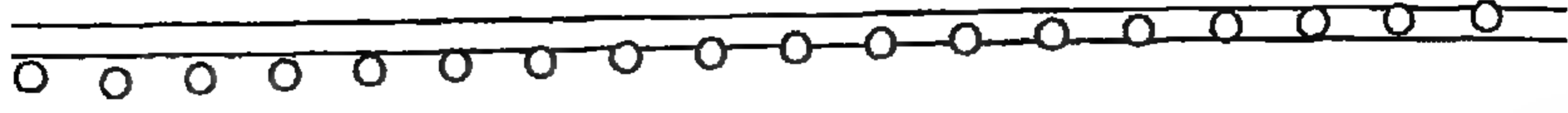
$$ع^٢ + ٤ ع + ٢٩ = صفر$$

ملحوظة:

مع أن عملية تركيب المعادلة في حقل الأعداد المركبة يماثل عملية تركيبها في حقل الأعداد الحقيقية، إلا أنه اذا كان مميز المعادلة موجباً فالجذران غير مترافقين. لذا لا يمكن تكوين المعادلة التربيعية أ ع<sup>٢</sup> + ب ع + ج = صفر بمعرفة جذر واحد.



## الأعداد المركبة



مثال:

جد المعادلة التربيعية ذات المعاملات الحقيقية وأحد جذريها  $2 - \sqrt{3}$  ت.

الحل:

الجذر الآخر  $2 + \sqrt{3}$  ت.

$$ع^2 - (\text{مجموع الجذرين})ع + \text{حاصل ضربيهما} = \text{صفر}$$

$$ع^2 - (2 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3})ع + (2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = \text{صفر}$$

$$ع^2 - 4ع + 4 - 3 = \text{صفر}$$

$$ع^2 - 4ع + 1 = \text{صفر}$$

$$ع^2 - 4ع + 4 - 3 = \text{صفر}$$

$$ع^2 - 4ع + 1 = \text{صفر}$$

(٢٤ - ٥) الجذور التكعيبية للواحد الصحيح في حقل الأعداد المركبة:

لِلواحد الصحيح جذور تربيعية وأخرى تكعيبية، منها الحقيقية ومنها غير

الحقيقية، والتفسير كما في البيان:

أولاً الجذور التربيعية للواحد الصحيح:

هي الأعداد التي تحقق المعادلة  $ع^2 = 1$  في حقل الأعداد المركبة.

$$\text{أي: } ع^2 - 1 = \text{صفر}$$

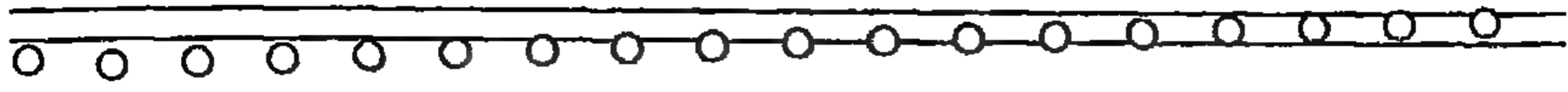
$$\text{أو } (ع - 1)(ع + 1) = \text{صفر التحليل كفرق بين مربعين}$$

$$\therefore ع = 1, ع = -1 \quad \text{الجذران التربيعيان للواحد الصحيح}$$

$$\therefore \sqrt{1} = \{1, -1\} \quad \text{وهي أعداد حقيقية.}$$



## الأعداد المركبة



والجدير بالذكر أن النظام الرياضي المكون من مجموعة الجذور التربيعية للواحد الصحيح مع عملية الضرب يشكل زمرة تبديلية كما في الجدول:

1	1-	x
1-	1	1-
1	1-	1

عنصرها المحايد الواحد الصحيح نفسه

والعدد - 1 نظير نفسه

والعدد 1 نظير نفسه

ولأن  $1 - 1 \times 1 = 1 - 1 = 1$  فهي زمرة تبديلية.

ثانياً الجذور التكعيبية للواحد الصحيح:

هي الأعداد التي تحقق المعادلة  $x^3 = 1$  في حقل الأعداد المركبة.

أي  $x^3 - 1 = 0$  صفر

أو  $(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$  صفر التحليل كفرق بين مكعبين.

ومنها  $x - 1 = 0$  صفر  $\leftarrow x = 1$  الجذر التكعيبي الأول وهو عدد حقيقي (مركب أيضاً)

ومنها  $x^2 + x + 1 = 0$  صفر وتحلل هذه المعادلة بالقانون العام لحل المعادلات

حيث  $a = 1$ ،  $b = 1$ ،  $c = 1$

$$\therefore x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 1 \times 1}}{2 \times 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

$$= \frac{-1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}i}{2} \quad ، \quad \frac{-1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}i}{2}$$

أي أن الجذور التكعيبية للواحد الصحيح هي:



## الأعداد المركبة



$\sqrt[2]{1} = \{1, -1, \dots, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\}$  (الأول مركب حقيقي،  
والآخران مركبان غير حقيقيين)

ومن الملاحظ أن أحد الجذرين المركبين غير الحقيقيين هو مربع للجذر  
الآخر هكذا:

$$\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

والعكس صواب:

$$\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

(تأكد مما سبق عن طريق الضرب بواسطة قانون التوزيع).

لذلك لو رمزنا لأحد الجذرين المركبين بالرمز  $\omega$  (أميغا) فالجذر الآخر هو  $\omega^2$

فالجذور التكعيبية للواحد الصحيح هي:  $\{1, \omega, \omega^2\}$

$$\sqrt[2]{1} = \{1, \omega, \omega^2\}$$

وبشكل عام إذا كان  $\alpha$  ح فإن الجذور التكعيبية للعدد الحقيقي  $\alpha$  هي:

$$\{1, \sqrt[2]{\alpha}, \sqrt[2]{\alpha}\omega, \sqrt[2]{\alpha}\omega^2\}$$

والتفسير هكذا:

$$\sqrt[3]{\alpha} = \alpha^{1/3}$$

$$\therefore \alpha^{1/3} = \alpha^{2/3}$$

$\alpha^{1/3} - \alpha^{2/3} = \text{صفر}$  ويتحليل المقدار كفرق بين تكعيبي عددين

$$\alpha^{1/3} - \alpha^{2/3} = (\alpha^{1/3} - \alpha^{2/3})(\alpha^{1/3} + \alpha^{2/3} + \alpha) = \alpha^{1/3} - \alpha^{2/3} = \text{صفر}$$

ومنها  $\alpha^{1/3} - \alpha^{2/3} = \text{صفر} \leftarrow \alpha^{1/3} = \alpha^{2/3}$  الجذر المركب الحقيقي الأول

## الأعداد المركبة



أما  $\sqrt[2]{ع} + \sqrt[2]{أ} = \sqrt[2]{ف}$  صفر فحلها بالقانون العام

حيث: معامل  $\sqrt[2]{ع} = \sqrt[2]{أ} = 1$

معامل  $\sqrt[2]{ع} = \sqrt[2]{ب} = \sqrt[2]{أ}$

الحد المطلق = ج =  $\sqrt[2]{أ}$

$$\frac{\sqrt[2]{أ} \sqrt[2]{ع} \pm \sqrt[2]{أ} \sqrt[2]{ف}}{\sqrt[2]{أ} \sqrt[2]{ع} \pm \sqrt[2]{أ} \sqrt[2]{ف}} = \frac{\sqrt[2]{أ} \sqrt[2]{ع} \pm \sqrt[2]{أ} \sqrt[2]{ف}}{\sqrt[2]{أ} \sqrt[2]{ع} \pm \sqrt[2]{أ} \sqrt[2]{ف}} = \sqrt[2]{ع} \therefore$$

$$\frac{(\sqrt[2]{أ} \sqrt[2]{ع} \pm \sqrt[2]{أ} \sqrt[2]{ف})}{\sqrt[2]{أ} \sqrt[2]{ع} \pm \sqrt[2]{أ} \sqrt[2]{ف}} = \frac{(\sqrt[2]{أ} \sqrt[2]{ع} \pm \sqrt[2]{أ} \sqrt[2]{ف})}{\sqrt[2]{أ} \sqrt[2]{ع} \pm \sqrt[2]{أ} \sqrt[2]{ف}} = \frac{(\sqrt[2]{أ} \sqrt[2]{ع} \pm \sqrt[2]{أ} \sqrt[2]{ف})}{\sqrt[2]{أ} \sqrt[2]{ع} \pm \sqrt[2]{أ} \sqrt[2]{ف}} =$$

$$\sqrt[2]{أ} \sqrt[2]{ع} = \left\{ \frac{\sqrt[2]{أ} \sqrt[2]{ع}}{\sqrt[2]{أ} \sqrt[2]{ع}} - \frac{1}{\sqrt[2]{أ} \sqrt[2]{ع}}, \frac{\sqrt[2]{أ} \sqrt[2]{ع}}{\sqrt[2]{أ} \sqrt[2]{ع}} + \frac{1}{\sqrt[2]{أ} \sqrt[2]{ع}} \right\} \sqrt[2]{أ} \sqrt[2]{ع} = \omega \sqrt[2]{أ} \sqrt[2]{ع}, \omega \sqrt[2]{أ} \sqrt[2]{ع} =$$

أي أن  $\sqrt[2]{أ} \sqrt[2]{ع} = \{\omega \sqrt[2]{أ} \sqrt[2]{ع}, \omega \sqrt[2]{أ} \sqrt[2]{ع}, \sqrt[2]{أ} \sqrt[2]{ع}\}$

مثال:

أوجد  $\sqrt[2]{أ} \sqrt[2]{ع}$

مباشرة مما سبق  $\sqrt[2]{أ} \sqrt[2]{ع} = \{\omega \sqrt[2]{أ} \sqrt[2]{ع}, \omega \sqrt[2]{أ} \sqrt[2]{ع}, \sqrt[2]{أ} \sqrt[2]{ع}\}$  حيث  $\sqrt[2]{أ} \sqrt[2]{ع}$  داخل القوس كعدد

مركب حقيقي  $\sqrt[2]{ع} = 2$

$$\{\omega 2, \omega 2, 2\} = 8 \therefore$$

وأما بتكوين المعادلة:

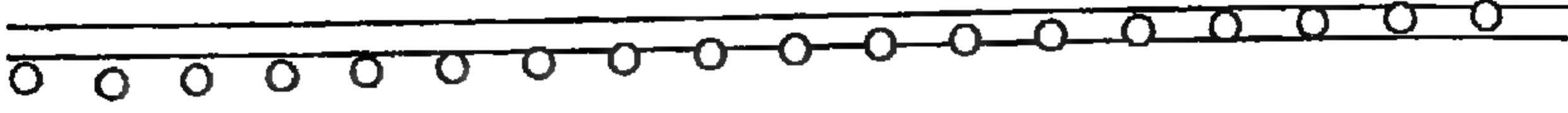
نفرض أن  $\sqrt[2]{ع} = 8$

والتحليل كفرق بين مكعبين  $\sqrt[2]{ع} = 8 \leftarrow \sqrt[2]{ع} - 8 = \text{صفر}$

$$(2 - \sqrt[2]{ع})(\sqrt[2]{ع} + 2 + \sqrt[2]{ع}) = \text{صفر}$$



## الأعداد المركبة



ع = ٢ كعدد مركب حقيقي

وحل المعادلة  $ع^٢ + ٢ع + ٤ = \text{صفر}$  بالقانون العام

تنتج الأجوبة  $٢\omega, \omega$  في نهاية المطاف

مثال:

$$\sqrt[٢]{\omega, \omega, ١} = \sqrt[٢]{\omega, \omega, ١} = \sqrt[٢]{\omega, \omega, ١}$$

$$= \{-١, -\omega, -\omega^٢\} \text{ وهكذا...}$$

دونك الآن خصائص الجذور التكعيبية للواحد الصحيح  $\{\omega, \omega, ١\}$

وبإيجاز شديد:

الخاصية الأولى:

(i) مجموعها جميعاً = صفر أي أن  $\omega + \omega + ١ = \text{صفر}$

$$\text{والبيان: } ١ + \omega + \omega = \left(-\frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢}i\right) + \left(-\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}i\right) + ١ = ١$$

$$= ١ - ١ = \text{صفر}$$

والفائدة من هذه الخاصية:

$$\omega + \omega + ١ = \text{صفر}$$

$$\therefore \omega - \omega = ١$$

$$\omega - ١ = \omega$$

$$\omega - ١ = \omega^٢$$

الخاصية الثانية:

(ii) حاصل ضربيهما جميعاً = ١ ، أي أن  $(\omega)(\omega) = ١$



## الأعداد المركبة



$$\text{البيان: } (1) \left( -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{3}{2}} \right) = (1) \left( -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3}{2}} \right) = \left( -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{3}{2}} \right) \left( -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3}{2}} \right) = \left( \frac{1}{4} - \frac{3}{2} \right) = -\frac{5}{4}$$

$$1 = (1)(1) = \left( -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3}{2}} \right) \left( -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{3}{2}} \right) =$$

لكن  $(1) = (\omega)(\omega^2)$  حسب قوانين الأسس

$$\therefore 1 = \omega \omega^2 \text{ دائماً}$$

وهذه الخاصية بالذات مهمة جداً في الرياضيات وعلى وجه الخصوص في الأعداد المركبة وحقلها، إذ تساعد على كتابة قوى  $\omega$  بأبسط صورة ممكنة حسب القاعدة التالية:

$$\omega^{2n+r} = \omega^r \text{ وعند إجراء هذه العملية نقسم القوة على 3 ونضعها بالصورة:}$$

$$3n + r \text{ فتكون } r \text{ هي الباقي كعدد موجب } r = \{0, 1, 2\}$$

كما يلي:

مثال:

اكتب القيم التالية بأبسط صورة، {واحدة من 1،  $\omega$ ،  $\omega^2$  فقط}:

$$(i) \omega^{25}$$

الحل:

$$\begin{array}{r} 8 \\ 3 \overline{) 25} \\ \underline{24} \\ 1 \end{array}$$

باقي موجب

$$\omega = \omega^1 \quad \omega = \omega^{1+(8)3} \quad \omega = \omega^{1+24} \quad \omega = \omega^{25}$$

$$(كون \quad \omega = \omega^{(8)3+1} = \omega^{(8)3} \omega = (\omega^3)^8 \omega = 1^8 \omega = \omega)$$

$$(ii) \omega^{-58}$$

الحل:

$$\begin{array}{r} 20- \\ 3 \overline{) 58-} \\ \underline{60\pm} \\ 2 \end{array}$$

باقي موجب

$$\omega = \omega^{2+(20- )3} \quad \omega = \omega^{58-}$$

$$(كون \quad \omega = \omega^{(20- )3+2} = \omega^{(20- )3} \omega^2 = 1^{(20- )} \omega^2 = \omega^2)$$



### الأعداد المركبة



(iii)  $\omega^{27}$ :

$$\begin{array}{r} 9 \\ 3 \overline{) 27} \\ \underline{27} \\ 0 \end{array}$$

الحل:

$$\omega^{27} = \omega^{(9) \cdot 3} = (\omega^9)^3 = 1^3 = 1 \text{ من الأسس}$$

$$(\omega^{27})^3 = (\omega^9)^9 = 1^9 = 1 \text{ كون}$$

فأبسط صورة لقوى  $\omega$  هي 1 ،  $\omega$  ،  $\omega^2$  فقط كما أسلفنا.

### (iii) الخاصية الثالثة:

الجذران المركبان  $(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)$  ،  $(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)$  (ت) غير الحقيقيين مترافقان، أحدهما مرافق الآخر كما ترى:

أي أن العدد المركب (غير الحقيقي):  $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$  ت هو مرافق العدد المركب غير الحقيقي.

$$-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \text{ ت والعكس صواب}$$

ولا تنسى أن أحدهما يعتبر مربع الآخر، أي أن:

$$(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)^2 = (-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) \text{ والعكس صواب}$$

وبشكل عام: للجذرين المركبين غير الحقيقيين للواحد الصحيح:

$$(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)^2 = (-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) \text{ ، } (-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)^2 = (-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i) \text{ صفتان معاً هما:}$$

أحدهما مرافق الآخر ، وأحدهما مربع الآخر!!!

### (iv) الخاصية الرابعة:

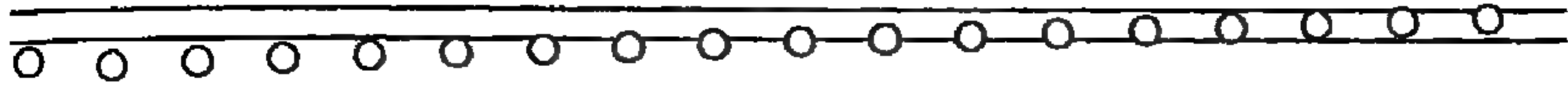
النظام الرياضي المكون من مجموعة الجذور التكعيبية للواحد الصحيح

$\{1, \omega, \omega^2\}$  مع عملية الضرب بشكل زمرة تبديلية والبيان كما في الجدول

والتفسير التاليين:

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} \hline & 1 & \omega & \omega^2 & 1 & \omega & \omega^2 & 1 & \omega & \omega^2 & 1 & \omega & \omega^2 & 1 & \omega & \omega^2 \\ \hline 1 & 1 & \omega & \omega^2 & 1 & \omega & \omega^2 & 1 & \omega & \omega^2 & 1 & \omega & \omega^2 & 1 & \omega & \omega^2 \\ \omega & \omega & \omega^2 & 1 & \omega & \omega^2 & 1 & \omega & \omega^2 & 1 & \omega & \omega^2 & 1 & \omega & \omega^2 & 1 \\ \omega^2 & \omega^2 & 1 & \omega & \omega^2 & 1 & \omega & \omega^2 & 1 & \omega & \omega^2 & 1 & \omega & \omega^2 & 1 & \omega \end{array}$$

## الأعداد المركبة



أي أن  $\{1, \omega, \omega^2, \times\}$  زمرة تبديلية

$\omega^2$	$\omega$	1	$\times$
$\omega^2$	$\omega$	1	1
1	$\omega^2$	$\omega$	$\omega$
$\omega$	1	$\omega^2$	$\omega^2$

عنصرها المحايد هو الواحد الصحيح نفسه.

والعدد 1 نظير نفسه الضربي

و:  $\omega$  نظير  $\omega^2$  الضربي

و:  $\omega^2$  نظير  $\omega$  الضربي

وتبديلية لأن:

$$1 = \omega \times \omega^2 = \omega^2 \times \omega$$

$$\omega = 1 \times \omega = \omega \times 1$$

$$\omega^2 = 1 \times \omega^2 = \omega^2 \times 1$$

مثال:

أوجد حاصل ضرب  $(1 - \omega + \omega^2)(1 + \omega + \omega^2)$  بأبسط صورة.

الحل:

$$\text{بما أن } \omega = \omega^{1+2} = \omega^3 \text{ فإن}$$

$$= (1 - \omega + \omega^2)(1 + \omega + \omega^2) \text{ وبواسطة قانون التوزيع:}$$

$$= (1 - \omega + \omega^2)1 + (1 - \omega + \omega^2)\omega - (1 - \omega + \omega^2)\omega^2 =$$

$$= 1 - \omega + \omega^2 + \omega - \omega^2 + \omega^3 - 1 + \omega - \omega^2 - \omega^2 + \omega^3 - \omega^3 + \omega^4 - \omega^4 + \omega^5 =$$





### الأعداد المركبة



لكن  $\omega = {}^1+{}^2 \omega = {}^1 \omega$  وكذلك  $1 = {}^2 \omega$

$${}^2 \omega - 1 + 1 + \omega - 1 = \therefore$$

$$\{ {}^2 \omega - \omega - \} + 3 = {}^2 \omega - \omega - 3 =$$

$$\xi = 1 + 3 =$$

كون  $1 + \omega + {}^2 \omega =$  صفر (من خصائص الجذور التكعيبية للواحد الصحيح)

$$\therefore {}^2 \omega - \omega - = 1$$

مثال:

اكتب ما يلي بأبسط صورة ممكنة {كواحد من  $1, \omega, {}^2 \omega$ }

$${}^2 \omega = {}^2 \omega \times 1 = {}^2 \omega \cdot {}^1(1) = {}^2 \omega \times {}^1({}^2 \omega) = {}^{2+1} \omega = {}^3 \omega \quad (i)$$

$$\begin{array}{r} 3- \\ 2- \\ 1+ \\ \hline 1 \end{array}$$

$$\omega \times {}^2(1) = {}^1 \omega \times {}^2({}^2 \omega) = {}^{1+(2)2} \omega = {}^5 \omega \quad (ii)$$

$$\omega = \omega(1) =$$

$$\frac{1}{{}^{12}(\omega + 1)} \quad (iii)$$

الحل:

بما أن  $1 + \omega + {}^2 \omega =$  صفر  $\leftarrow {}^2 \omega - = \omega + 1$

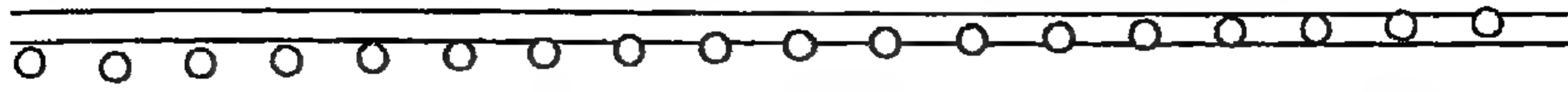
$$\frac{1}{\omega \times {}^8(1)} = \frac{1}{\omega \times {}^8({}^3 \omega)} = \frac{1}{\omega \times {}^{24} \omega} = \frac{1}{{}^{24} \omega} = \frac{1}{{}^2(\omega -)} = \frac{1}{{}^{12}(\omega + 1)}$$

$$\frac{1}{\omega} = \text{لكن } {}^1(\omega) = 1 \text{ من الأسس}$$

$$1 = \frac{1}{1} = \therefore$$



## الأعداد المركبة



(٢٤ - ٦) حل أنظمة لمعادلات من الدرجتين الثالثة والرابعة بمتغير واحد:

أنت تعلم أن المعادلة من الدرجة الثالثة بمتغير واحد صورتها العامة:

$$أع^٣ + ب ع^٢ + ج ع + د = صفر$$

وكما تعلم أيضاً أن المعادلة من الدرجة الرابعة بمتغير واحد صورتها العامة:

$$أع^٤ + ب ع^٣ + ج ع^٢ + د ع + هـ = صفر$$

لكل من أ ، ب ، ج ، د ، هـ أعداد حقيقية.

و : ع عدد مركب

أي أن المعاملات يجب أن تكون حقيقية، وإيجاد مجموعة الحل لكل منها سيتم بطرق التحليل الى العوامل بأشكاله والقسمة الطويلة أو التركيبية ونظرية العوامل مع الاستفادة من الجذور التكعيبية للواحد الصحيح، وقانون حل المعادلات التربيعية العام  $ع = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤أج}}{٢أ}$  كما يلي:

مثال:

$$حل المعادلة ع^٣ + ٨ = صفر$$

الحل:

بواسطة التحليل الى العوامل كمجموع مكعبين:

$$ع^٣ + ٨ = (ع + ٢)(ع^٢ - ٢ع + ٤) = صفر$$

$$ع + ٢ = صفر \leftarrow ع = -٢ \text{ الجذر الأول للمعادلة وهو عدد مركب حقيقي.}$$

وحل المعادلة التربيعية  $ع^٢ - ٢ع + ٤ = صفر$  بالقانون العام هكذا:

$$أ = ١ ، ب = -٢ ، ج = ٤$$

$$ع = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤أج}}{٢أ} = \frac{٢ \pm \sqrt{٤ - ١٦}}{٢} = \frac{٢ \pm \sqrt{-١٢}}{٢}$$



## الأعداد المركبة



$$\frac{\sqrt[3]{72} \pm 2}{2} = \frac{\sqrt[3]{12} - \sqrt{2} \pm 2}{12} =$$

$$ع = \frac{\sqrt[3]{72} \pm 1}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{72} \pm 1 \text{ عدنان مركبان غير حقيقيان.}$$

مجموعة الحل للمعادلة:  $\{-2, \sqrt[3]{72} - 1, \sqrt[3]{72} + 1\}$

مثال:

$$\text{حل المعادلة } ع^3 + 3ع^2 + ع - 5 = 0 \text{ صفر}$$

الحل:

نجد جذورها الحقيقية ان وجدت بواسطة نظرية العوامل هكذا:

عوامل العدد 5 هي:  $-1, 1, -5, 5$

$$\text{نجد ق (1) } = 1^3 + 3(1)^2 + 1 - 5 = 0 \text{ صفر}$$

$\therefore$  1 جذر للمعادلة ومنها:

ع-1 عامل

ولإيجاد العوامل الأخرى نقسم  $ع^3 + 3ع^2 + ع - 5$  على  $ع - 1$  بالقسمة التركيبية:

الثابت ع	ع	ع <sup>2</sup>	ع <sup>3</sup>	(1)
-5	1	3	1	"جمعاً وضرباً"
5	4	1	7	
$\therefore$	5	4	1	

$$\therefore ع^3 + 3ع^2 + ع - 5 = (ع - 1)(ع^2 + 4ع + 5) = 0 \text{ صفر}$$

والآن نجد جذور المعادلة التربيعية  $ع^2 + 4ع + 5 = 0$  صفر

بالقانون العام حيث:  $أ = 1, ب = 4, ج = 5$



## الأعداد المركبة



$$\frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \times 1 \times 5}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-4 \pm 2i}{2} = -2 \pm i$$

$$= \frac{-2 \pm i}{2} = -1 \pm \frac{i}{2}$$

∴ مجموعة الحل للمعادلة هي:  $\{1, -2 - i, -2 + i\}$

مثال:

حل المعادلة  $x^4 - 1 = 0$  = صفر

الحل:

$$x^4 - 1 = 0 \Rightarrow x^4 = 1$$

فحلول المعادلة  $x^4 - 1 = 0$  = صفر معناه ايجاد الجذور الرابعة والأربعة للواحد الصحيح هكذا:

$x^4 - 1 = 0$  = صفر نستخدم التحليل الى العوامل كفرق بين مربعين

$$(x^2 - 1)(x^2 + 1) = 0$$

$$(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1) = 0$$

$$(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1) = 0$$

$$(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1) = 0$$

$$\therefore x = 1, -1, i, -i$$

∴ مجموعة الحل للمعادلة =  $\{1, -1, i, -i\}$

أي أن  $\sqrt[4]{1} = \{1, -1, i, -i\}$  والتفسير

جذران مركبان حقيقيان هما  $\pm 1$

وجذران مركبان غير حقيقيان هما  $\pm i$

## الأعداد المركبة



ملحوظة:

نلاحظ مما سبق أن:

(i) الجذور التربيعية للواحد الصحيح أعداد حقيقية فقط أي:

$$\sqrt{1} = \{-1, 1\} \text{ جذران مركبان حقيقيان}$$

(ii) الجذور التكعيبية للواحد الصحيح أعداد مركبة حقيقية وغير حقيقية أي أن:

$$\sqrt[3]{1} = \{1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\} \text{ جذر مركب حقيقي وجذران مركبان غير حقيقيان.}$$

(iii) الجذور الرابعة للواحد الصحيح أعداد مركبة حقيقية وغير حقيقية، أي:

$$\sqrt[4]{1} = \{1, -1, i, -i\} \text{ جذران مركبان حقيقيان وجذران مركبان غير حقيقيان.}$$

ولن نستمر لأن هذا القدر يكفي لبيان جذور الواحد الصحيح.

مثال:

$$\text{حل المعادلة } x^4 + 2x^2 + 1 = 0 \text{ صفر}$$

الحل:

بالتحليل الى العوامل:

$$x^4 + 2x^2 + 1 = 0 \text{ صفر}$$

$$(x^2 + 1)(x^2 + 1) = 0 \text{ صفر}$$

$$\text{أي أن } (x^2 - 1)(x^2 - 1) = 0 \text{ صفر}$$

$$(x - 1)(x + 1)(x - 1)(x + 1) = 0 \text{ صفر}$$

∴  $x = \pm 1$  جذور مكررة عددها أربعة، وجميعها مركبة غير حقيقية.

∴ مجموعة الحل =  $\{-1, 1\}$  فقط.

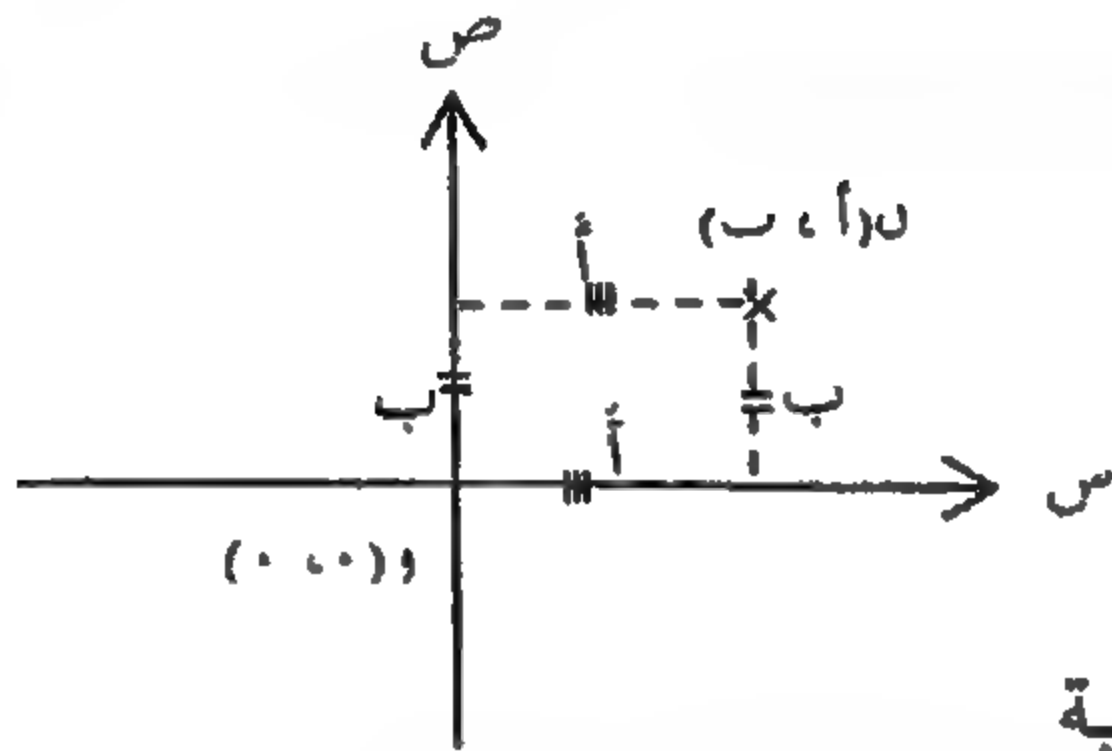




(٢٤ - ٧) أنظمة الاحداثيات الديكارتية والقطبية:

× نظام الاحداثيات الديكارتية Cartesian Coordinates System:

لا بُد أنك تعلم أن كل نقطة في المستوى الديكارتي تمثل بزواج مرتب واحد وواحد فقط على الصورة (أ ، ب) حيث يسمى العدد أ الاحداثي السيني للنقطة ن (أ ، ب) ويسمى العدد ب الاحداثي الصادي لنفس النقطة ن (أ ، ب) كما في الشكل:



أي أن كل زوج مرتب يمثل بنقطة واحدة فقط في المستوى الديكارتي

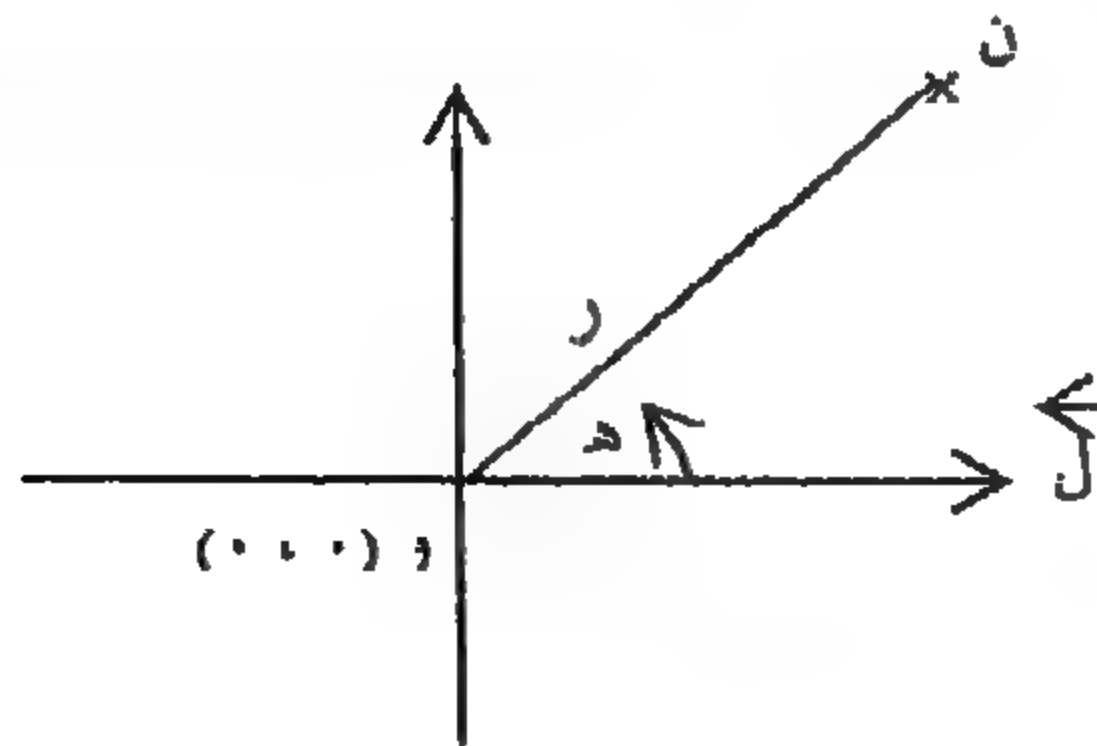
هذا النظام يسمى نظام الاحداثيات الديكارتية نسبة الى مبتكره ديكارت العام الفرنسي.

× أما نظام الاحداثيات القطبية Polar Coordinates System:

والذي سنتعرف عليه من خلال هذه السطور: فهو طريقة أخرى لتمثيل النقط في المستوى كما يلي:

ليكن  $\rho$  شعاعاً ينطلق من نقطة ثابتة مثل  $O$  و (نقطة الأصل في المستوى).

ولتكن  $r$  هي المسافة بين النقطة  $N$  والنقطة  $O$  والزاوية  $\theta$  هي الزاوية المحصورة بين القطعة المستقيمة  $ON$  والشعاع  $\rho$  مقاسة باتجاه عقارب الساعة (موجبة القياس) كما في الشكل.



عندها نقول أن للنقطة  $N$  الاحداثيين القطبيين (ر ، هـ) أي تمثل النقطة  $N$  بالزوج المرتب  $N$  (ر ، هـ) في المستوى ويسمى الشعاع  $\rho$  المحور القطبي.

وتسمى النقطة  $O$  الأصل أو القطب كما هو واضح بالشكل أعلاه.

### الأعداد المركبة



والملاحظ أن كل زوج مرتب (ر ، هـ) يمثل بنقطة واحدة فقط في المستوى، والعكس غير صواب، فكل نقطة في المستوى يمكن تمثيلها بعدد لا نهائي من الأزواج المرتبة لأن مضاعفات الزاوية  $2\pi$  للزاوية هـ يبقياها في مكانها ولا يغير موقعها. أي أن:

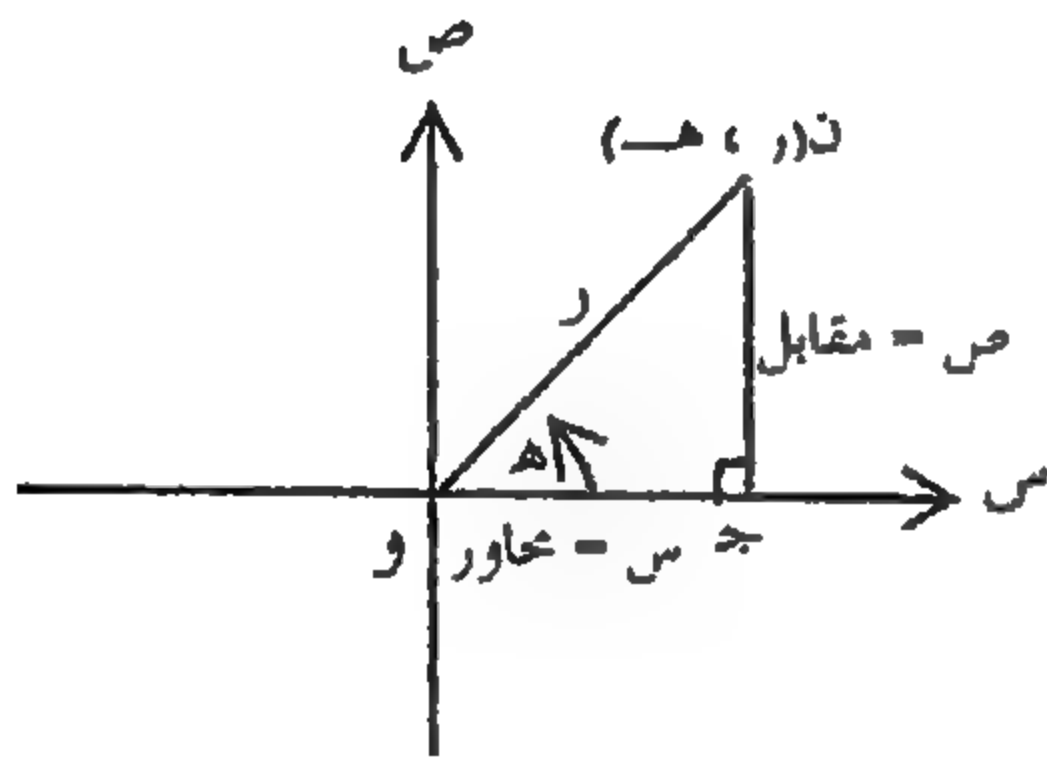
ن (ر ، هـ)  $\leftarrow$  فإن ن (ر ، هـ +  $2\pi$  ك) حيث ك  $\in \mathbb{Z}$

لأن  $h = h + 2\pi k$  {كوننا نضيف دورات كاملة للزاوية هـ والتي نبقياها كما هي}

مثال:

$\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} = 30^\circ$  الخ كوننا نطرح من كل منها  $\frac{\pi}{6}$  أو مضاعفاتنا لتعود الى  $30^\circ = \frac{\pi}{6}$  فقط.

ولتحويل الاحداثيات الديكارتية الى احداثيات قطبية أو العكس نحدد أولاً العلاقة بين هذه الاحداثيات وتلك كما في الشكل.



المثلث ن ج و قائم الزاوية:

$$\frac{v}{r} = \frac{h}{r} = \frac{\text{مقابل}}{\text{الوتر}} = \text{جا هـ}$$

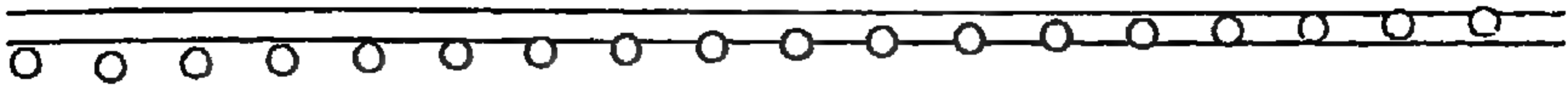
$$\therefore \text{جا هـ} = \frac{v}{r} \text{ وبالمضرب التبادلي:}$$

$$v = r \text{ جا هـ} \quad (1)$$

$$\text{وينفس الأسلوب: } s = r \text{ جتا هـ} \quad (2)$$

$$\text{لكن } r^2 = s^2 + v^2 \quad (\text{نظرية فيثاغورس}) \quad (3)$$

$$\therefore \begin{cases} s = r \text{ جتا هـ} \\ v = r \text{ جا هـ} \\ \sqrt{s^2 + v^2} = r \end{cases}$$



وهذه العلاقات الثلاث تحدد طريقة التحويل من نظام الاحداثيات الديكارتية الى نظام الاحداثيات القطبية والعكس.

مثال:

إذا كانت الاحداثيات القطبية للنقطة  $(\epsilon, -\frac{\pi}{6})$  أوجد احداثياتها الديكارتية:

الحل:

$$\epsilon = r, \quad -\frac{\pi}{6} = \theta$$

$$\therefore \text{س} = r \cos \theta = \epsilon \cos \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \epsilon \cos \frac{\pi}{6} = \epsilon \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{وكذلك ص} = r \sin \theta = \epsilon \sin \left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\epsilon \sin \frac{\pi}{6} = -\epsilon \cdot \frac{1}{2}$$

$\therefore$  الاحداثيات الديكارتية للنقطة  $(\epsilon, -\frac{\pi}{6})$  هي  $(\frac{\sqrt{3}\epsilon}{2}, -\frac{\epsilon}{2})$

مثال:

ما الاحداثيات القطبية للنقطة  $(\epsilon, -\frac{\pi}{4})$

الحل:

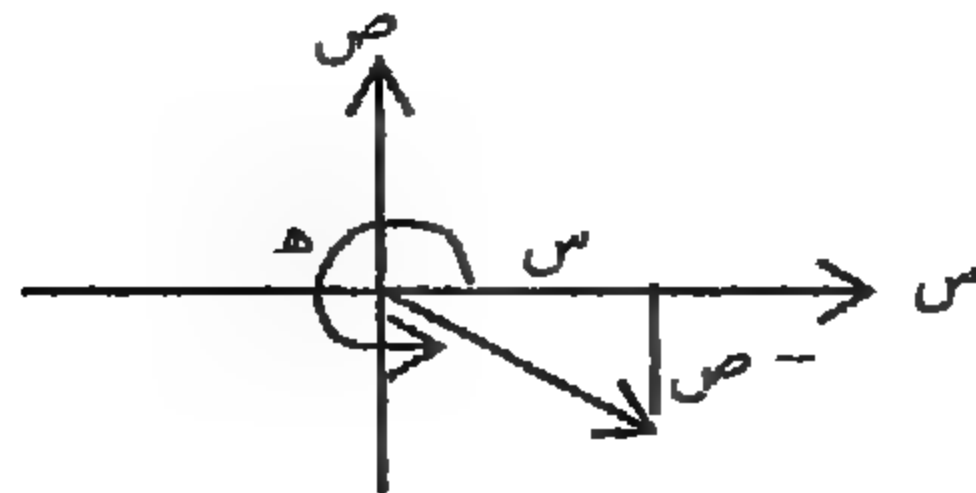
$$\epsilon = r, \quad -\frac{\pi}{4} = \theta$$

$$\text{فإن } r = \sqrt{\epsilon^2 \cos^2 \theta + \epsilon^2 \sin^2 \theta} = \epsilon \sqrt{\cos^2 \left(-\frac{\pi}{4}\right) + \sin^2 \left(-\frac{\pi}{4}\right)} = \epsilon \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \epsilon \sqrt{1} = \epsilon$$

$$\text{وبما أن س} = r \cos \theta \text{ ← جتا هـ} = \frac{\text{س}}{r} = \frac{\epsilon \cos \left(-\frac{\pi}{4}\right)}{\epsilon} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{وبما أن ص} = r \sin \theta \text{ ← جا هـ} = \frac{\text{ص}}{r} = \frac{\epsilon \sin \left(-\frac{\pi}{4}\right)}{\epsilon} = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore \theta = -\frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$$



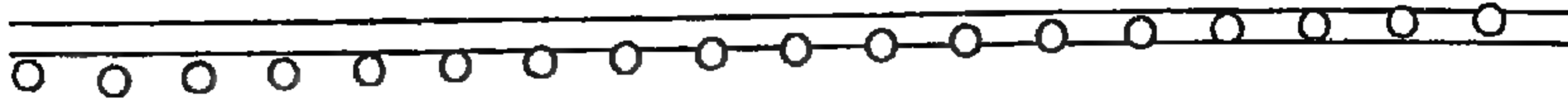
$$\frac{7\pi}{4} = \text{الزاوية كحالة خاصة}$$

وأما  $\frac{7\pi}{4} = 2\pi - \frac{\pi}{4}$  الزاوية كحالة عامة (إضافة عدد من الدورات)





## الأعداد المركبة



الاحداثيات القطبية للنقطة  $(\sqrt{4}, \frac{\pi}{4})$  (ن ك  $\pi$ )

كعدد لا نهائي من الأزواج المرتبة.

مثال:

اكتب المعادلة الديكارتية  $z = 1 + j$  بالصورة القطبية بدلالة  $(r, \theta)$ .

الحل:

نتخلص من  $s$  ،  $v$  هكذا:

$$(1) \quad \text{بما أن } s = r \cos \theta \quad \leftarrow \text{فإن } s = r \cos \theta$$

$$(2) \quad \text{وبما أن } v = r \sin \theta \quad \leftarrow \text{فإن } v = r \sin \theta$$

$$\therefore s = r \cos \theta = r \cos \theta + j r \sin \theta = r (\cos \theta + j \sin \theta)$$

متطابقة بالمثلثات جتا  $\theta$  + جا  $\theta$  = 1

$$\therefore s = r \cos \theta + j r \sin \theta$$

$$\text{أي أن } z = 1 + j \quad \text{الصورة القطبية للمعادلة } s = 1 + j$$

مثال:

اكتب المعادلة القطبية  $z = 1 + j$  بالصورة الديكارتية.

للتخلص من جتا  $\theta$  ، جا  $\theta$  نقول: (بدلالة  $s$  ،  $v$ )

الحل:

$$\text{بما أن } z = 1 + j = r (\cos \theta + j \sin \theta)$$

$$\therefore r (\cos \theta + j \sin \theta) = 1 + j$$

$$\text{أي أن } (r \cos \theta) = 1 \quad (r \sin \theta) = 1$$



## الأعداد المركبة



لكن  $s = r$  جتا هـ ،  $v = r$  جا هـ

∴  $s = v = 2$  بالتعويض

∴  $s = v = 2$  الصورة الديكارتية للمعادلة  $r^2$  جا ٢ هـ  $= ٤$

مثال:

اكتب المعادلة القطبية  $r = ٢$  أ جا هـ بالصورة الديكارتية (بدلالة  $s$  ،  $v$ )

الحل:

$$r = \sqrt{s^2 + v^2} = 2$$

$$\text{وان } v = r \cos \theta = 2 \cos \theta = \frac{v}{\sqrt{s^2 + v^2}} = \frac{v}{r}$$

$$\therefore \sqrt{s^2 + v^2} = 2 \quad (1) \quad \left( \frac{v}{\sqrt{s^2 + v^2}} \right) \text{ بالضرب التبادلي}$$

$$s^2 + v^2 = 4$$

$$s^2 + v^2 - 4 = 0$$

أي أن  $s^2 + v^2 - 4 = 0$  الصورة الديكارتية.

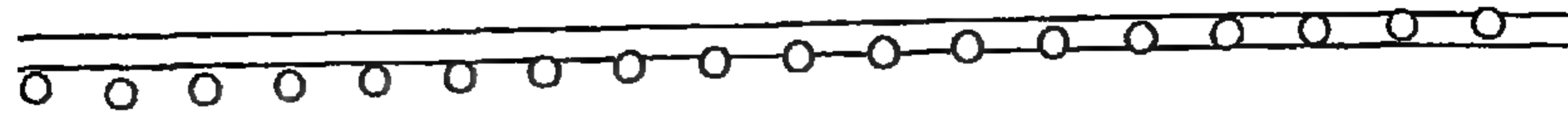
(٢٤ - ٨) المستوى المركب والصورة القطبية للعدد المركب  $a + bi$ :

× المستوى المركب Complex Plane:

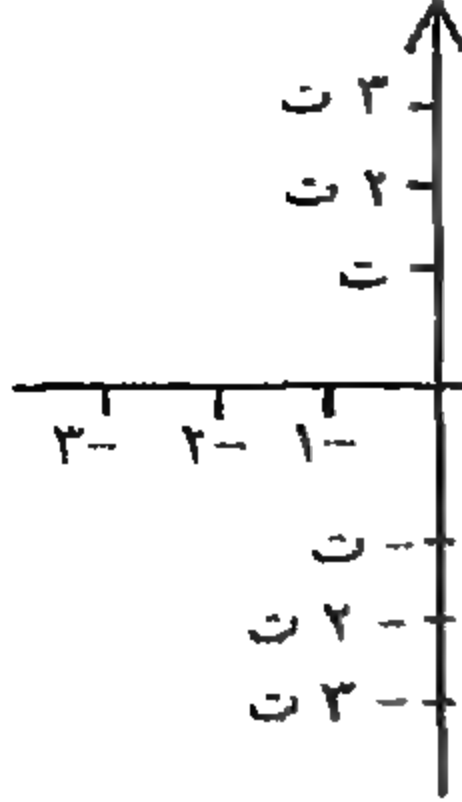
هو المستوى الذي يُمثل عليه الأعداد المركبة والتي على الصورة  $a + bi$  حيث  $a$  ،  $b$  عددين حقيقيين،  $i = \sqrt{-1}$  عدد تخيلي، وبذلك يمكن تمثيل العدد المركب  $a + bi$  بالزوج المرتب  $(a, b)$  حيث  $a$  يمثل الجزء الحقيقي للعدد المركب ألا وهو  $a$  و  $b$  يمثل الجزء التخيلي للعدد المركب ألا وهو  $b$  وهذا لا يتم إلا على مستوى الأعداد المركبة والذي محوره السيني يمثل الجزء الحقيقي ومحوره الصادي يمثل الجزء التخيلي، وكأن المحورين أصبحا المحور السيني أو الحقيقي والمحور الصادي أو التخيلي كما في الشكل.



## الأعداد المركبة



ص المحور التخيلي



والمستوى المركب يُنسب الى مبتكره:

الرياضي الفرنسي ارجاند (١٧٦٨ - ١٨٢٢)م

والرياضي الألماني جاوس (١٧٧٧ - ١٨٥٥) م

لذا يسمى أحياناً بمستوى ارجاند وأحياناً أخرى بمستوى جاوس.

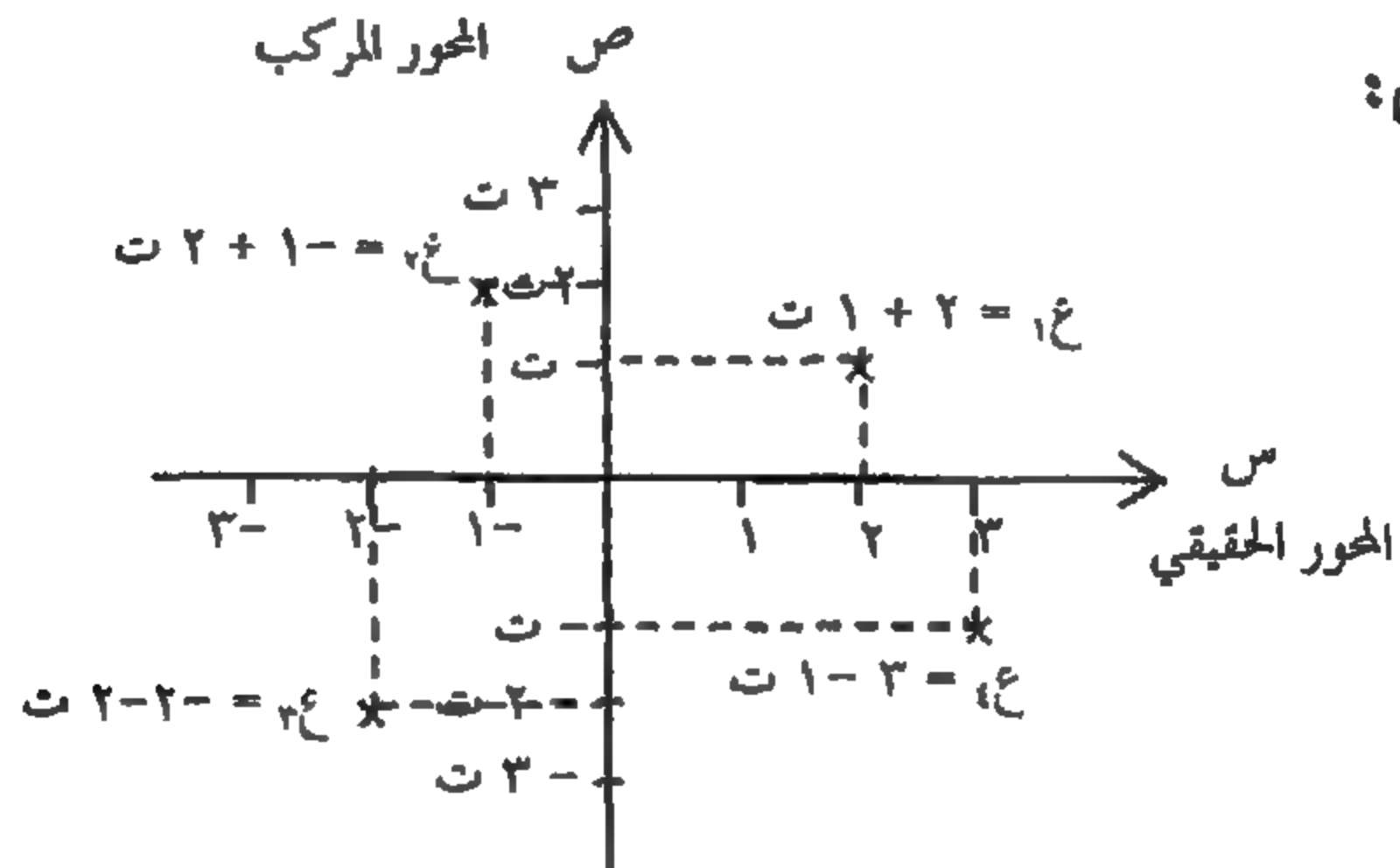
فلتمثيل الأعداد المركبة والتي على الصورة أ + ب ت نقوم برسم المستوى المركب ثم نعين عليه النقطة ن (أ ، ب ت) كما في المثال والشكل التالي:

مثال:

مثل الأعداد المركبة التالية على مستوى ارجاندا ومستوى جاوس

$$١ع + ٢ت ، ١ع - ٢ت ، ١ع + ٢ت ، ١ع - ٢ت ، ١ع - ٢ت ، ١ع - ٢ت$$

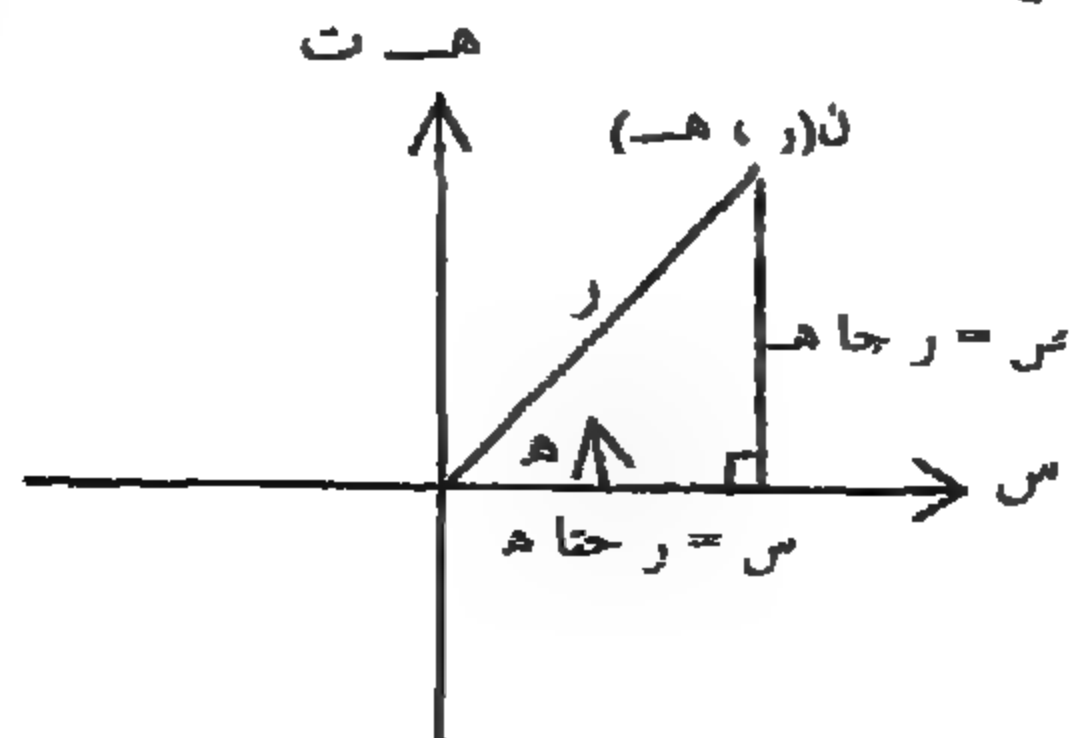
الحل:



وأما الصورة القطبية للعدد المركب ع = س + ص ت Polar form:

ان الاحداثيات القطبية للنقطة التي تمثل العدد المركب س + ص ت هي ن (ر ، هـ) كاحداثيات قطبية والتي تقابل النقطة ن (س ، ص) كاحداثيات

ديكارتية كما في الشكل.

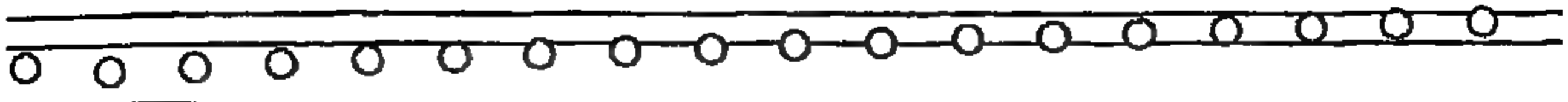


حيث وكما مر سابقاً:

$$ر = \sqrt{ص^2 + س^2}$$



## الأعداد المركبة



ويسمى مقياس العدد المركب  $s + vt$   $= |s + vt| = \sqrt{s^2 + v^2}$

وان:  $s =$  رجتها  $\left\{ \begin{array}{l} \text{حيث } \rightarrow \text{تسمى سعة العدد المركب } s + vt \\ v = \text{رجاها} \end{array} \right.$

فالعدد المركب  $s + vt$  له مقياس  $|s + vt| = \sqrt{s^2 + v^2}$

وله سعة هي  $\rightarrow$  حيث  $s =$  رجتها

$v =$  رجاها

مثال:

احسب مقياس كل من الأعداد المركبة:

$$(i) \quad -1 + 2t \quad (ii) \quad 7 - 4t$$

الحل:

$$\text{المقياس } r = \sqrt{s^2 + v^2} = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2} = \sqrt{5}$$

$$\text{المقياس } r = \sqrt{s^2 + v^2} = \sqrt{(7)^2 + (0)^2} = \sqrt{49} = 7$$

مثال:

احسب سعة كل من الأعداد المركبة التالية:

$$(i) \quad 1 + 1t \quad (ii) \quad 1 - 1t$$

الحل:

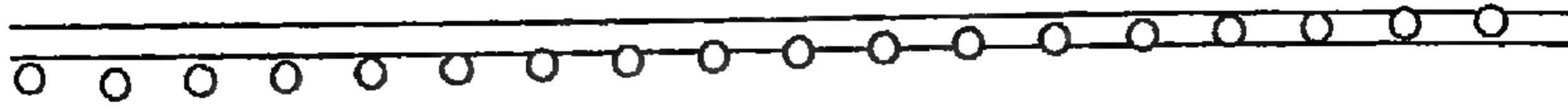
(i) نجد المقياس أولاً:

$$r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

ولإيجاد رجتها ، رجاها



## الأعداد المركبة



$$\text{بما أن } s = \text{رجتا هـ} \quad 1 = \sqrt[2]{\text{جتا هـ}} \quad \frac{1}{\sqrt[2]{\text{جتا هـ}}} = \text{جتا هـ}$$

$$\text{وبما أن } v = \text{رجا هـ} \quad 1 = \sqrt[2]{\text{جا هـ}} \quad \frac{1}{\sqrt[2]{\text{جا هـ}}} = \text{جا هـ}$$

∴ هـ تقع في الربع الأول، حيث هـ موجب، جتا هـ "موجب"

$$\text{ومنه: ظا هـ} = \frac{\text{جا هـ}}{\text{جتا هـ}} = \frac{\frac{1}{\sqrt[2]{\text{جتا هـ}}}}{\frac{1}{\sqrt[2]{\text{جا هـ}}}} = 1$$

$$\therefore \text{ هـ} = \frac{\pi}{4} \text{ في الربع الأول}$$

$$\frac{\pi}{4} = \text{فسعة العدد الأول}$$

$$(ii) \quad 1 = \sqrt[2]{\text{جا هـ}} = \sqrt[2]{1 + 0} = \sqrt[2]{1} = 1$$

$$\text{لحساب السعة } \angle \text{ هـ:} \quad s = \text{رجتا هـ} \leftarrow \text{جتا هـ} = \frac{1}{1} = \text{صفر}$$

$$v = \text{رجا هـ} \leftarrow \text{جا هـ} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\therefore \text{ هـ} = \frac{\pi}{2} \quad (0^\circ 270^\circ)$$

ولتمثيل العدد المركب  $e = s + jat$

بالاحداثيات القطبية تمثيلاً وحيداً فإننا

نحدد سعته بالزاوية هـ،  $0 \leq \text{هـ} < 2\pi$  لدورة واحدة فقط

بما أن  $e = s + jat$  الصورة العامة الديكارتية (هكذا تسمى)

ولما كانت  $s = \text{رجتا هـ}$ ،  $v = \text{رجا هـ}$

فإن  $e = \text{رجتا هـ} + \text{رجا هـ} \times t$

$r = (\text{جتا هـ} + t \text{ جا هـ})$  وهذه تسمى الصورة القطبية

أو التمثيل القطبي للعدد المركب  $s + jat$ .





مثال:

اكتب العدد المركب  $z = -6 + 6i$  بالصورة القطبية

الحل:

بما أن الصورة القطبية للعدد المركب  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$

$$\sqrt{z} = \sqrt{-6 + 6i} = \sqrt{36 + 36i} = \sqrt{36} + \sqrt{36i} = 6 + 6i$$

$$\cos \theta = \frac{6}{6} = 1 \Rightarrow \theta = 0 \quad \sin \theta = \frac{6}{6} = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\cos \theta = 1 \Rightarrow \theta = 0 \quad \sin \theta = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

$\therefore z$  تقع في الربع الثاني حيث  $\cos \theta$  موجب و  $\sin \theta$  سالب

$$\cos \theta = \frac{6}{6} = 1 \Rightarrow \theta = 0 \quad \sin \theta = \frac{6}{6} = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{2} - \pi = -\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore z = 6(\cos(-\frac{\pi}{2}) + i \sin(-\frac{\pi}{2})) = 6(\cos \frac{\pi}{2} - i \sin \frac{\pi}{2})$$

والآن سنناقش كيفية اجراء عمليات "الضرب والقسمة والرفع" على

الأعداد المركبة بالصورة القطبية هكذا:

$$\text{إذا كان } z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$$

$$z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$$

عددان مركبان وبالصورة القطبية فإن:

(i) قاعدة الضرب وبالرموز تتم كما يلي:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2))$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2))$$

"لاحظ أن المقاييس تضرب  $r_1$  و  $r_2$  والزوايا تجمع  $\theta_1 + \theta_2$ "



كما في المثال:

مثال:

أوجد حاصل ضرب:

$$\left[ \left( -\frac{\pi}{2} \right) \text{جتا} + \left( -\frac{\pi}{2} \right) \text{تجا} \right] \sqrt{2} \left[ \left( -\frac{\pi}{4} \right) \text{جتا} + \left( -\frac{\pi}{4} \right) \text{تجا} \right] \sqrt{2}$$

$$\text{الجواب: } (2) \sqrt{2} \left[ \left( -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \text{جتا} + \left( -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \text{تجا} \right]$$

$$= \sqrt{2} \left[ \frac{\pi^2}{4} \text{جتا} + \frac{\pi^2}{4} \text{تجا} \right]$$

(ii) قاعدة القسمة وبالرموز تتم كما يلي:

$$\frac{14}{14} = \frac{(جتا هـ_1 + تجا هـ_1) \div (جتا هـ_2 + تجا هـ_2)}{14}$$

$$= \frac{1}{14} \left[ (جتا هـ_1 - هـ_2) \text{جتا} + (تجا هـ_1 - هـ_2) \text{تجا} \right]$$

"لاحظ أن المقاييس تقسم  $\frac{1}{14}$  والزوايا تطرح هـ\_1 - هـ\_2"

كما في المثال:

مثال:

$$\text{أوجد خارج قسم } \left[ \left( \frac{\pi^2}{4} \right) \text{جتا} + \left( \frac{\pi^2}{4} \right) \text{تجا} \right] \sqrt{6}$$

$$\div \left[ \left( \frac{\pi^2}{4} \right) \text{جتا} + \left( \frac{\pi^2}{4} \right) \text{تجا} \right]$$

$$\text{الجواب: } \frac{\sqrt{6}}{2} \left[ \left( \frac{\pi}{3} - \frac{\pi^2}{4} \right) \text{جتا} + \left( \frac{\pi}{3} - \frac{\pi^2}{4} \right) \text{تجا} \right]$$

$$= \sqrt{3} \left[ \left( \frac{\pi^5}{12} \right) \text{جتا} + \left( \frac{\pi^5}{12} \right) \text{تجا} \right]$$

(iii) قانون دي موافر Dem.Oivre Rule انه يرتبط بعملية الرفع وبالرموز يتم حسب

قانون ينسب الى الرياضي الفرنسي دي موافر (١٦٦٧ - ١٧٥٤) م والذي

ينص على:

بدلاً من الضرب المتكرر للعدد المركب بالصورة القطبية فإننا نختصر

العملية هكذا:

### الأعداد المركبة



$$[r(\cos \theta + j \sin \theta)]^n = r^n (\cos n\theta + j \sin n\theta)$$

$$\text{لكل } n \in \mathbb{Z}, n \geq 2$$

مثال:

اكتب  $[2(\cos \frac{\pi}{4} + j \sin \frac{\pi}{4})]^2$  كعدد مركب بالصورة القطبية

الحل:

$$\text{حسب قانون دي موافر } = 2^2 (\cos \frac{\pi}{2} + j \sin \frac{\pi}{2})$$

$$= 4 (\cos \frac{\pi}{2} + j \sin \frac{\pi}{2})$$

والسؤال الذي يطرح نفسه الآن هو:

ماذا يُستفاد من قانون دي موافر في حقل الأعداد المركبة؟

الجواب يُستخلص من هذا المثال:

مثال:

اكتب العدد المركب  $(1 + j\sqrt{3})$  بالصورة الديكارتية  $s + jt$

الحل:

بما أن عملية ضرب العدد المركب  $(1 + j\sqrt{3})$  في نفسه 5 مرات عملية شاقة ومعقدة وتحتاج لوقت طويل. لذا فإننا نحوله الى الصورة القطبية ونستخدم قانون دي موافر ثم نعيده الى الصورة الديكارتية هكذا:

$$\text{للعدد المركب } z = (1 + j\sqrt{3}) \text{ فإن } r = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\text{وبما أن } s = r \cos \theta \quad \leftarrow \cos \theta = \frac{s}{r} = \frac{1}{2}$$

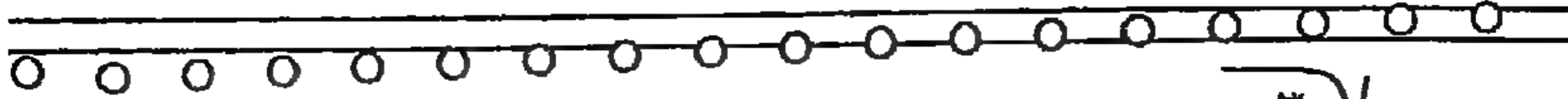
$$s = r \cos \theta \quad \leftarrow \cos \theta = \frac{s}{r} = \frac{1}{2}$$

∴  $\theta$  تقع في الربع الأول كون جيبها وجيب تمامها موجبان.





### الأعداد المركبة



$$\therefore \text{ظا ه} = \frac{\sqrt[3]{\frac{2}{1}}}{\frac{2}{2}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{1} > \frac{\pi}{3} = \text{هـ}$$

$$\therefore (1 + \sqrt[3]{3}t)^\circ = [2(\text{جتا } \frac{\pi}{3} + t \text{ جا } \frac{\pi}{3})]^\circ$$

وحسب قانون دي موافر:

$$= [(\frac{\pi}{3} \times 5 \text{ جتا} + \frac{\pi}{3} \times 5 \text{ جا})]^\circ 2 =$$

$$= [32(\frac{\pi 5}{3} \text{ جتا} + \frac{\pi 5}{3} \text{ جا})]^\circ$$

ثم نعيده الى الصورة س + ص ت هكذا:

$$\text{جتا } \frac{\pi 5}{3} = \text{جتا } (\frac{\pi}{3} - \pi 2) = \text{جتا } \frac{\pi}{3} \text{ كونها في الربع الرابع}$$

$$= \frac{1}{2} \text{ موجب}$$

$$\text{جا } \frac{\pi 5}{3} = \text{جا } (\frac{\pi}{3} - \pi 2) = -\text{جا } \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt[3]{2}}{2} \text{ سالب}$$

$$\therefore (1 + \sqrt[3]{3}t)^\circ = [32(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt[3]{2}}{2}t)]^\circ = 16 - 16\sqrt[3]{3}t$$

ومنها

$$\therefore (1 + \sqrt[3]{3}t)^\circ = 16 - 16\sqrt[3]{3}t$$

"تأكد ان استطعت بالضرب المتكرر 5 مرات

للعدد  $1 + \sqrt[3]{3}t$  .!!!!

مثال:

اكتب  $(1 - t)^\circ$  كعدد مركب على صورة  $a + bt$ .

الحل:

نحوه الى الصورة القطبية:

$$(1 - t) = r(\text{جتا ه} + t \text{ جا ه})$$



## الأعداد المركبة



$$\text{حيث } r = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$1 = \sqrt{2} \cos \theta \leftarrow \text{جنا ه} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{كون س} = \text{ر جنا ه}$$

$$-1 = \sqrt{2} \sin \theta \leftarrow \text{جا ه} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{كون ص} = \text{ر جا ه}$$

∴ ه تقع في الربع الرابع

$$\therefore \text{ظا ه} = \frac{-\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = -1$$

$$\therefore \text{ه} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

$$\therefore 1 - i = \sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$$

وحسب قانون دي موافر:

$$[1 - i]^{100} = [\sqrt{2} (\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4})]^{100}$$

$$= (\sqrt{2})^{100} [\cos \frac{300\pi}{4} + i \sin \frac{300\pi}{4}]$$

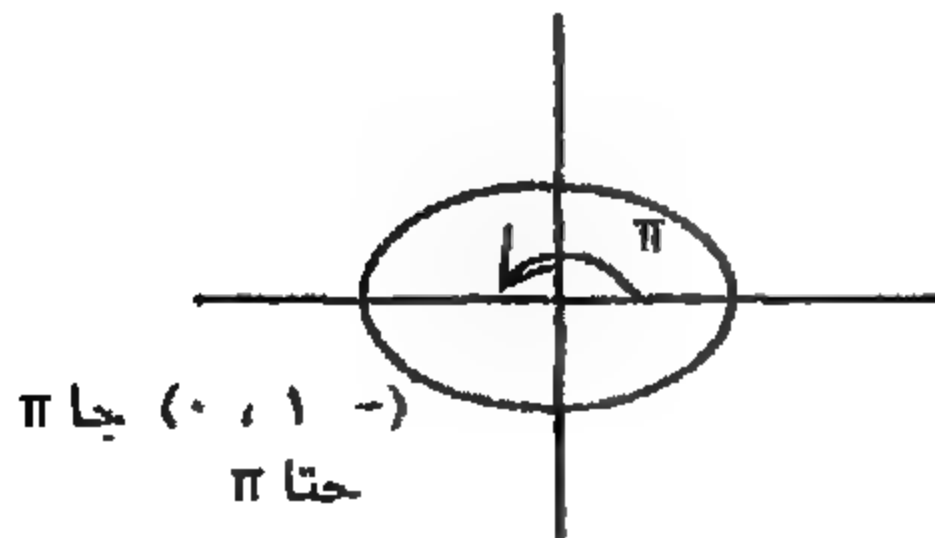
$$= 2^{50} (\cos 75\pi + i \sin 75\pi)$$

$$= 2^{50} (\cos \pi + i \sin \pi) \text{ (بعد حذف دورات كاملة كل منها } 2\pi, 4\pi, \dots \text{ دورة)}$$

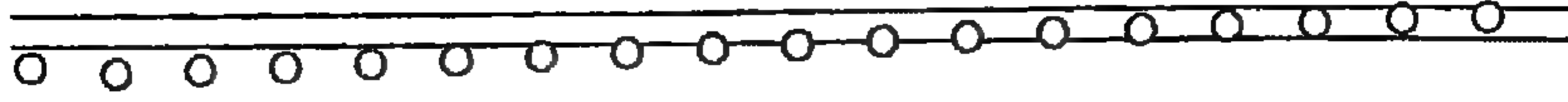
$$= 2^{50} (-1 + i \cdot 0)$$

$$= -2^{50}$$

$$= -2^{50}$$



## الأعداد المركبة



### (٢٤ - ٩) أمثلة محلولة على الأعداد المركبة

مثال (١) :

أوجد ناتج كل من العمليات التالية في حقل الأعداد المركبة وبصورة

أ + ب ت :

$$(i) (-1 - 4t) (2 - 3t)$$

الحل بواسطة قانون التوزيع:

$$= (-1 - 4t) (2 - 3t)$$

$$= -2 + 3t + 8t - 12t^2$$

$$= -2 + 11t - 12t^2$$

$$= -2 + 11t - 12t^2$$

$$= -2 + 11t - 12t^2$$

$$= -2 + 11t - 12t^2$$

$$(ii) \frac{-3t}{-1 + 2t}$$

الحل بانطاق المقام وضربه بسطاً ومقاماً بالمرافق - 1 - 2 ت هكذا:

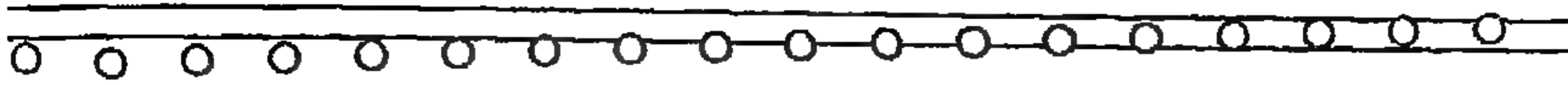
$$\frac{(-3t)(-1 + 2t)}{-1 + 2t} = \frac{-3t(-1 + 2t)}{-1 + 2t} = \frac{-3t(-1 + 2t)}{-1 + 2t}$$

$$= \frac{-3t(-1 + 2t)}{-1 + 2t} = \frac{-3t(-1 + 2t)}{-1 + 2t}$$

$$= \frac{-3t(-1 + 2t)}{-1 + 2t} = \frac{-3t(-1 + 2t)}{-1 + 2t}$$



### الأعداد المركبة



$$(iii) (3 - 2t) + (-6 - 3t)$$

$$\text{الحل} = 3 - 2t - 6 - 3t$$

$$= 3 - 2t - 6 - 3t$$

$$= -5 - 5t$$

$$(iv) (3 + 5t) - (2 - 3t)$$

$$\text{الحل} = 3 + 5t - 2 + 3t$$

$$= 3 + 5t - 2 + 3t$$

$$= 1 + 8t$$

مثال (2):

أوجد مجموعة الحل للمعادلة  $4 - 3x^2 = 0$  صفري في حقل الأعداد المركبة.

الحل:

تحليل الى العوامل:

$$4 - 3x^2 = 0$$

$$(4 + 3x^2)(1 - x^2) = 0$$

$$\text{وحيث أن } x^2 = -1$$

$$\text{فإن } (4 + 3x^2)(1 - x^2) = 0$$

$$(4 + 3x^2)(1 - x^2) = 0$$

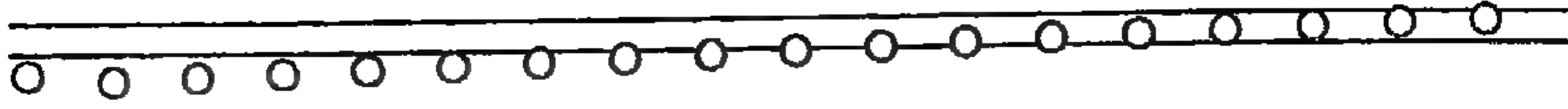
$$\therefore x = 1, -1, 2, -2$$

مجموعة الحل =  $\{1, -1, 2, -2\}$  حلان مركبان حقيقيان وحلان

مركبان غير حقيقيين.



### الأعداد المركبة



مثال (٣):

أوجد مجموعة الحل لكل من المعادلات التالية في حقل الأعداد المركبة (ح ، + ، ×)

$$(i) \quad 81 + z^2 = \text{صفر}$$

$$\text{الحل: } 81 + z^2 = 0 \Rightarrow z^2 = -81 \Rightarrow z = \pm 9i$$

$$\therefore z = \pm 9i = \text{صفر}$$

وبالتحليل كفرق بين مربعين

$$(z + 9i)(z - 9i) = \text{صفر}$$

$$\therefore z = \pm 9i$$

مجموعة الحل =  $\{9i, -9i\}$  والجذران مركبان وغير حقيقيين.

$$(ii) \quad 1 + z + z^2 = \text{صفر}$$

الحل بواسطة القانون العام لحل المعادلات التربيعية:

$$\text{حيث } a = 1, b = 1, c = 1$$

$$b^2 - 4ac = 1 - 4 = -3$$

$$\therefore z = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore z = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$

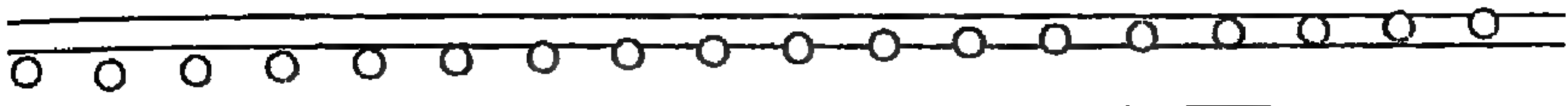
مثال (٤):

حوّل العدد المركب  $1 + i\sqrt{3}$  إلى الصورة القطبية

الحل:

الصورة القطبية للعدد المركب  $s + it = r(\cos \theta + i \sin \theta)$





حيث  $r = \sqrt{s^2 + v^2}$  ،  $s = r \cos \theta$  ،  $v = r \sin \theta$

$$r = \sqrt{s^2 + v^2} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10} = 2\sqrt{2}$$

$$\cos \theta = \frac{s}{r} = \frac{3}{2\sqrt{2}}$$

$$\sin \theta = \frac{v}{r} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

∴  $\theta$  تقع في الربع الأول كون  $\cos \theta$  ،  $\sin \theta$  موجبان

$$\sqrt{3} = \frac{\cos \theta}{\frac{1}{2}} = 2 \cos \theta$$

$$\cos \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$\therefore (1 + \sqrt{3}i) = 2 \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \text{ الصورة القطبية.}$$

مثال (٥):

$$z_1 = \sqrt[4]{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$z_2 = \sqrt[4]{2} \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

أوجد  $z_1 z_2$  وبالصورة القطبية ثم بالصورة الديكارتية

الحل:

$$z_1 z_2 = \sqrt[4]{2} \sqrt[4]{2} \left[ \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \right]$$

$$= \sqrt[4]{4} \left[ \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \right]$$

$$= \sqrt[4]{4} \left[ \cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right] \text{ هذه الصورة القطبية}$$



### الأعداد المركبة



أما الصورة الديكارتية:

$$e^{i\pi/2} = i = (\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ)$$

النظام السيني

$$e^{i\pi/2} = i = (\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ)$$

الربع التالي

$$e^{i\pi/2} = i = (\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ)$$

$$e^{i\pi/2} = i = (\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ)$$

$$e^{i\pi/2} = i = (\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ)$$

$$e^{i\pi/2} = i = (\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ)$$

$$e^{i\pi/2} = i = (\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ)$$

مثال (٦):

أوجد الجذور التكعيبية الثلاثة للعدد - ١ أي أن

$$z^3 = -1$$

الحل:

$$z^3 = -1$$

$$z^3 = -1$$

$$z^3 = -1$$

والتحليل كمجموع مكعبين

$$(z+1)(z^2-z+1) = 0$$





الجذر الأول المركب الحقيقي  $\therefore \epsilon = -1$

وكذلك  $\epsilon^2 - \epsilon + 1 = 0$  بالقانون العام حيث:

$$a = 1, b = -1, c = 1$$

$$\text{بما أن } \epsilon = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\text{فإن } \epsilon = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(1)}}{2(1)} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

$$\frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt{-3}}}{2}, \frac{\sqrt[3]{1 - \sqrt{-3}}}{2} = \frac{\sqrt[3]{1 \pm \sqrt{-3}}}{2}$$

$$\therefore \sqrt[3]{1 - \sqrt{-3}} = \left\{ \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt{-3}}}{2} + \frac{1}{2}, \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt{-3}}}{2} - \frac{1}{2}, 1 \right\}$$

وجذران مركبان غير حقيقيين

هذا ويمكن إيجاد  $\sqrt[3]{1 - \sqrt{-3}}$  اعتماداً على الجذور التكعيبية للواحد الصحيح

$1, \omega, \omega^2$  كما يلي:

$$\text{بما أن } \sqrt[3]{1 - \sqrt{-3}} = \sqrt[3]{1 \times 1 - \sqrt{-3}} = \sqrt[3]{1 \times 1 - \sqrt{-3}}$$

$$= \{1, \omega, \omega^2\}$$

$$= \{1 - \omega, \omega - \omega^2, 1 - \omega^2\} \text{ حيث } \sqrt[3]{1 - \sqrt{-3}} = 1 - \omega \text{ كعدد مركب حقيقي}$$

مثال (٧):

عين الأعداد المركبة التالية:  $\epsilon^2 - \epsilon + 1 = 0$

$$\epsilon^2 - \epsilon + 1 = 0$$

$$\epsilon^2 - \epsilon + 1 = 0$$

$$\epsilon^2 - \epsilon + 1 = 0$$

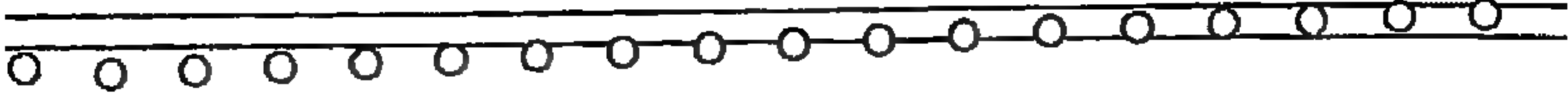
$$\epsilon^2 - \epsilon + 1 = 0$$

وعلى سطح واحد (على مستوى ارجاندا وجاوس)

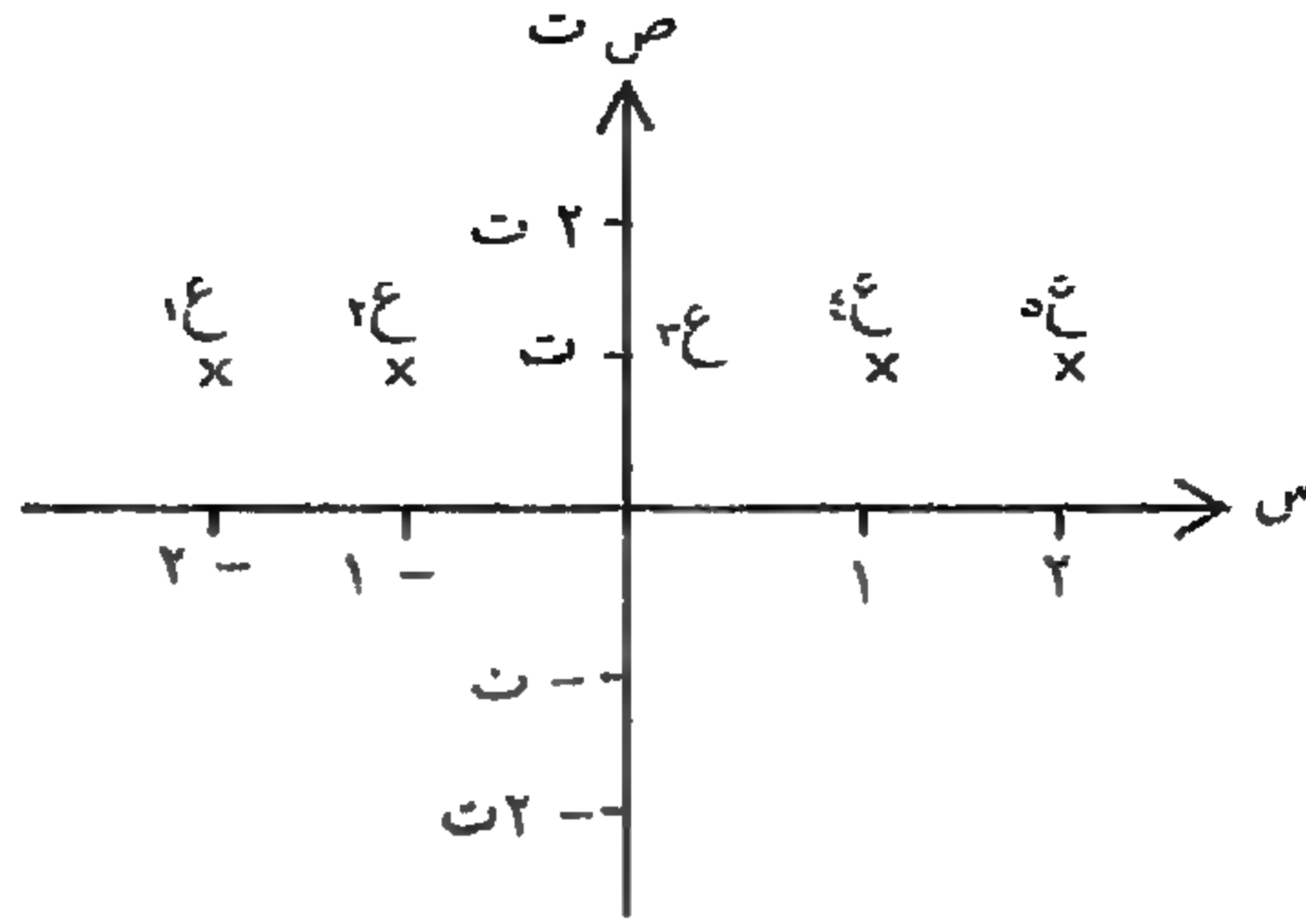




### الأعداد المركبة



الحل:



مثال (٨):

احسب المقياس لكل من الأعداد المركبة التالية:

$$(i) \quad ١ع - ٢ = ت$$

بما أن المقياس للعدد المركب  $أ + ب ت$  هو  $|أ + ب ت|$

$$\sqrt{٢أ + ٢ب} =$$

$$\therefore \text{مقياس العدد المركب } ١ع - ٢ = ت = \sqrt{٢(١) + ٢(٢)} = \sqrt{٥}$$

$$(ii) \quad ٢ع = \frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢} ت$$

$$\text{المقياس هو } \left| \frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢} ت \right|$$

$$= \sqrt{٢\left(\frac{١}{٢}\right)^2 + ٢\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{٤}{٤}} = ١$$

مثال (٩):

اكتب  $(-١ - ت)^\circ$  كعدد مركب على الصورة  $أ + ب ت$





الحل:

بما أن ضرب القوس  $(-1 - t)$  ٥ مرات عملية شاقة ومعقدة وتستغرق وقتاً طويلاً، لذا فإننا نحول العدد  $(-1 - t)$  الى الصورة القطبية وبمساعدة قانون دي موافر ثم نعيده الى الصورة  $A + Bt$  هكذا:

بما أن  $A + Bt = r(\cos \theta + j \sin \theta)$  بصورة قطبية.

$$\sqrt[5]{-1 - t} = \sqrt[5]{r(\cos \theta + j \sin \theta)} = \sqrt[5]{r}(\cos \frac{\theta}{5} + j \sin \frac{\theta}{5})$$

$$\text{وبما أن } \cos \theta = \frac{A}{r} \Rightarrow \cos \theta = \frac{A}{r} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[5]{r}} = \frac{A}{r}$$

$$\text{وكذلك } \sin \theta = \frac{B}{r} \Rightarrow \sin \theta = \frac{B}{r} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[5]{r}} = \frac{B}{r}$$

$\therefore \theta$  تقع في الربع الثالث كون  $\cos \theta$ ،  $\sin \theta$  سالبين

$$1 = \frac{\frac{1}{\sqrt[5]{r}}}{\frac{1}{\sqrt[5]{r}}} = \frac{\cos \theta}{\cos \theta}$$

$$\therefore \theta = \pi + \frac{\pi}{5} = \frac{6\pi}{5}$$

$$\therefore -1 - t = \sqrt[5]{r}(\cos \frac{6\pi}{5} + j \sin \frac{6\pi}{5})$$

$$\therefore (-1 - t)^5 = (\sqrt[5]{r}(\cos \frac{6\pi}{5} + j \sin \frac{6\pi}{5}))^5$$

$$= (\sqrt[5]{r})^5 (\cos \frac{6\pi}{5} + j \sin \frac{6\pi}{5})^5$$

$$= (\sqrt[5]{r})^5 (\cos \frac{6\pi}{5} + j \sin \frac{6\pi}{5})$$

$$= (\sqrt[5]{r})^5 (\cos \frac{\pi}{5} + j \sin \frac{\pi}{5})$$

$$= (\sqrt[5]{r})^5 (\cos \frac{\pi}{5} + j \sin \frac{\pi}{5})$$



### الأعداد المركبة



$$\frac{\sqrt{4} \times t}{\sqrt{4}} + \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{4}} =$$

$$\therefore (-1 - 1t) = 4 + 4t$$

مثال (١٠):

اكتب ما يأتي على صورة عدد مركب أ + ب ت

$$(i) \text{ ت }^{-1+2i} \text{ حيث ن } \exists \text{ ص}$$

الحل:

$$\text{ت }^{-1+2i} = \text{ت }^{-1} \times \text{ت }^{2i} = \frac{1}{\text{ت }^{2i}} \times \text{ت}$$

$$\pm = \frac{\text{ت}}{1 \pm} = \frac{\text{ت}}{-(1-i)} = \frac{\text{ت}}{(1-i)} =$$

وكعدد مركب =  $\pm t$  أو  $(-t)$  ،  $(+t)$

$$(ii) \text{ ت } + \text{ت }^{11} = \text{ت } + \text{ت }^{-(3-i)} = \text{ت } + \text{ت }^{-(3-i)} = \text{ت } + \text{ت }^{-(3-i)} =$$

$$= \text{ت } + (1) \times \text{ت }^{-2} = \text{ت } + \text{ت }^{-2} = \text{ت } + \text{ت }^{-2} =$$

وكعدد مركب =  $2 + t$

$$(iii) 3 + 1 - \sqrt{9} = 3 + 1 - \sqrt{9} = 3 + 1 - \sqrt{9} = 3 + 1 - \sqrt{9} =$$

$$= 3 + t$$

وكعدد مركب =  $3 + t$

مثال (١١):

أوجد قيم س ، ص الحقيقيين فيما يلي:

$$\text{س} + \text{ص ت} = (1 + t) + (2 + 4t)$$



### الأعداد المركبة



الحل:

$$س + ص ت = ١ + ت + ٤ + ٢ ت$$

$$= ١ + ٤ + ت + ٢ ت$$

$$= ٥ + ٣ ت$$

$$\therefore س + ص ت = ٥ + ٣ ت$$

ومن علاقة المساواة وتساوي المعاملات الحقيقية المتناظرة ينتج أن:

$$س = ٥ ، ص = ٣$$

مثال (١٢):

$$\text{إذا كان } ع_١ = \frac{٧ - ت}{٢ - ت} ، ع_٢ = \frac{١٣ - ت}{٤ + ت}$$

بيّن أن  $ع_١$ ،  $ع_٢$  مترافقان

الحل:

نجد  $ع_١$  ،  $ع_٢$  بصورة أ + ب ت هكذا:

$$ع_١ = \frac{٧ - ت}{٢ - ت} = \frac{(٧ - ت)(٢ + ت)}{(٢ - ت)(٢ + ت)} = \frac{١٤ - ٧ت + ٢ت - ت^٢}{٤ - ت^٢} = \frac{١٤ - ٥ت - ت^٢}{٤ - ت^٢}$$

$$ع_٢ = \frac{١٣ - ت}{٤ + ت} = \frac{(١٣ - ت)(١ - ت)}{(٤ + ت)(١ - ت)} = \frac{١٣ - ١٣ت - ت + ت^٢}{١ - ت^٢} = \frac{١٣ - ١٤ت + ت^٢}{١ - ت^٢}$$

$$ع_١ + ع_٢ = \frac{١٤ - ٥ت - ت^٢}{٤ - ت^٢} + \frac{١٣ - ١٤ت + ت^٢}{١ - ت^٢} =$$

$$\therefore ع_١ + ع_٢ = ٣ + ت$$

$$ع_٢ = \frac{١٣ - ت}{٤ + ت} = \frac{(١٣ - ت)(٤ - ت)}{(٤ + ت)(٤ - ت)} = \frac{٥٢ - ١٣ت - ٤ت + ت^٢}{١٦ - ت^٢} = \frac{٥٢ - ١٧ت + ت^٢}{١٦ - ت^٢}$$

$$ع_١ - ع_٢ = \frac{١٤ - ٥ت - ت^٢}{٤ - ت^٢} - \frac{٥٢ - ١٧ت + ت^٢}{١٦ - ت^٢} =$$



## الأعداد المركبة



$$\frac{17}{17} - \frac{51}{17} = \frac{17 - 51}{17} =$$

$$\therefore \text{ع} = 3 - \text{ت}$$

ولأن  $3 - \text{ت}$  هو مرافق  $3 + \text{ت}$  والعكس صواب

$\therefore$  ع ، ع مرافقان.

مثال (١٣):

أوجد الجذور التربيعية للعدد المركب  $5 + 12\text{ت}$

نفرض أن  $\text{س} + \text{ص ت} = \sqrt{5 + 12\text{ت}}$  (لا تتسبى أن  $\text{س}$  ،  $\text{ص}$  حقيقتان)

وبتربيع الطرفين:

$$(\text{س} + \text{ص ت})^2 = 5 + 12\text{ت}$$

$$\therefore (\text{س} + \text{ص ت})^2 = 5 + 12\text{ت}$$

$$\therefore \text{س}^2 + 2\text{س ص ت} + \text{ص}^2 \text{ت}^2 = 5 + 12\text{ت}$$

$$\therefore \text{س}^2 + 2\text{س ص ت} + \text{ص}^2 \text{ت}^2 = 5 + 12\text{ت}$$

$$\therefore \text{س}^2 - \text{ص}^2 = 5 \quad (1)$$

$$2\text{س ص} = 12 \quad (2) \quad \text{س ص} = 6$$

وبحل المعادلتين  $\text{س}^2 - \text{ص}^2 = 5$   $\leftarrow$  (1)

$\text{س ص} = 6 \leftarrow$  (2) بالتعويض وهكذا..

$$\text{س} = \frac{6}{\text{ص}} \quad (\text{س موضوع القانون})$$

$$\therefore 5 = \text{ص}^2 - \left(\frac{6}{\text{ص}}\right)^2$$

$$\text{ص}^2 \left(5 = \text{ص}^2 - \frac{36}{\text{ص}^2}\right)$$



## الأعداد المركبة



$$36 - 5v^2 = 4v^2$$

$$36 - 5v^2 = 4v^2$$

$$36 = (4 - v^2)(9 + v^2)$$

وبما أن  $s$  ،  $v$  أعداد حقيقية فإننا نكتفي بـ  $(4 - v^2) = 36$  = صفر

$$(2 + v)(2 - v) = 36$$

$$v = 2, -2$$

$$\text{ومنها } s = \frac{6}{2}, \frac{6}{-2} \leftarrow -3, 3$$

∴  $s + v = 2 - 3 = -1$  ت الجذر التربيعي الأول وهو مركب وغير حقيقي

وكذلك  $s + v = 2 + 3 = 5$  ت الجذر التربيعي الأول وهو مركب وغير حقيقي

$$\therefore \sqrt{5 + 12} = \{-3 - 2, 3 + 2\}$$

مثال (١٤):

حل ما يلي الى عوامل من الدرجة الأولى كأعداد مركبة وعلى الصورة  $s + vt$ :

$$(i) 5 + 6e^2 + e^4$$

الحل:

$$(5 + e^2)(1 + e^2)$$

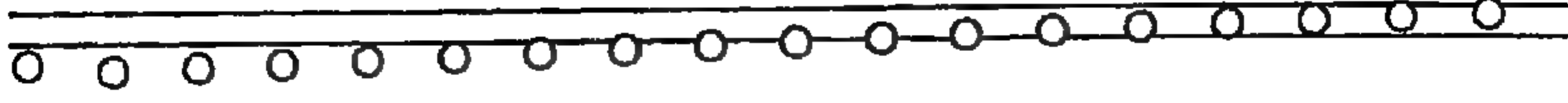
$$= (5 - e^2)(1 - e^2)$$

$$= (5 - e^2)(1 - e^2)$$

$$(ii) 1 + e^2 + e^4$$



## الأعداد المركبة



الحل:

$$(1 + \epsilon^2) + (\epsilon^2 + \epsilon^0)$$

$$= \epsilon^2 (1 + \epsilon^2) + (1 + \epsilon^2)$$

$$= (1 + \epsilon^2) (1 + \epsilon^2)$$

$$= (1 + \epsilon) (1 - \epsilon) (1 + \epsilon - \epsilon^2) (1 + \epsilon) =$$

$$= (1 + \epsilon - \epsilon^2) (1 + \epsilon) (1 + \epsilon) (1 - \epsilon) =$$

$$\text{لكن } 1 = \epsilon^2 \omega + \omega + 1 \text{ (الجذور التكعيبية للواحد الصحيح)}$$

$$\therefore 1 = \omega - \omega^2$$

$$\therefore (1 + \epsilon) (1 - \epsilon) (1 + \epsilon - \epsilon^2) (\omega - \omega^2) =$$

$$= (1 + \epsilon) (1 - \epsilon) \{ (\omega + \epsilon) - (\epsilon - \epsilon^2) \}$$

$$= (1 + \epsilon) (1 - \epsilon) \{ (\omega + \epsilon) - (\omega - \epsilon) \}$$

$$= (1 + \epsilon) (1 - \epsilon) \{ (\omega + \epsilon) - (\omega - \epsilon) \}$$

$$\text{لكن } 1 = \epsilon^2 \omega + \omega + 1 = \text{صفر}$$

$$\therefore \omega - 1 = \epsilon^2 \omega$$

$$\therefore (1 + \epsilon) (1 - \epsilon) (\omega + \epsilon) (\epsilon^2 \omega + \omega) =$$

$$\therefore (1 + \epsilon) (1 - \epsilon) (\omega + \epsilon) (\epsilon^2 \omega + \omega) = 1 + \epsilon^2 + \epsilon^2 + \epsilon^0$$

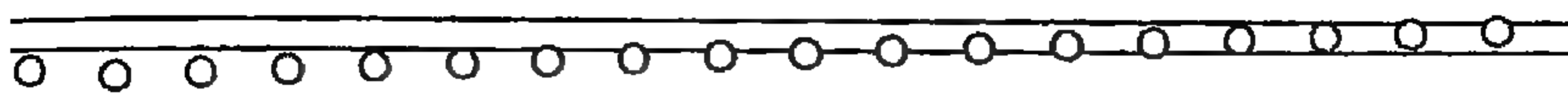
مثال (١٥):

$$\text{إذا كان (س + ت ص) (٣ - ٢ ت) = ١٣}$$

ما العلاقة بين ص ، س ؟



## الأعداد المركبة



الحل:

(س + ت ص) (٣ - ٢ ت) بعد التخلص من ت هكذا:

$$= س (٣ - ٢ ت) + ت ص (٣ - ٢ ت) = ١٣$$

$$= ٣ س - ٢ س ت + ٣ ت ص - ٢ ت^٢ ص = ١٣$$

$$= ٣ س - ٢ س ت + ٣ ت ص - ٢ ص (-١) = ١٣$$

$$= ٣ س - ٢ س ت + ٣ ت ص + ٢ ص = ١٣$$

$$= (٣ س + ٢ ص) + (-٢ س ت + ٣ ت ص) = ١٣$$

$$(٣ س + ٢ ص) + (-٢ س ت + ٣ ت ص) = ١٣ + ٠ ت$$

∴  $٣ س + ٢ ص = ١٣$  ← (١) وباستبعادها لأنها لا تعطي علاقة بين س ، ص

$$-٢ س + ٣ ص = ٠ ← (٢)$$

ومن المعادلة (٢)  $٢ س = ٣ ص$

$$\therefore \frac{٣}{٢} = \frac{س}{ص} \text{ أو } \frac{٢}{٣} = \frac{ص}{س} \text{ وكلاهما نفس العلاقة}$$

مثال:

كوّن المعادلة التربيعية ذات المعاملات الحقيقية والتي أحد جذريها ٥ + ت

الحل:

إذا كان أحد الجذرين ٥ + ت

فالجذر الآخر هو المرافق وهو ٥ - ت

وبما أن تركيب المعادلة التربيعية ذات المعاملات الحقيقية يتم هكذا:

$$ع^٢ - (\text{مجموع الجذرين}) ع + \text{حاصل ضربيهما} = \text{صفر}$$





### الأعداد المركبة



$$\therefore \text{ع}^2 - (5 + 5 - 5) \text{ع} + (5 + 5 - 5) = \text{صفر}$$

$$\text{ع}^2 - 10\text{ع} + 25 = \text{صفر}$$

$$\text{ع}^2 - 10\text{ع} + 25 = 1 = \text{صفر}$$

$$\text{ع}^2 - 10\text{ع} + 26 = \text{صفر}$$

مثال (١٧):

احسب الجذور التكعيبية الثلاثة للعدد ٢٧

الحل:

$$\sqrt[3]{27} \text{ كأعداد مركبة.}$$

$$= \sqrt[3]{27} (1, \omega, \omega^2) \text{ حيث } \sqrt[3]{27} \text{ كعدد مركب حقيقي}$$

$$= (1, \omega, \omega^2)^3$$

$$= 1, \omega^3, \omega^3 = 1$$

مثال (١٨):

احسب مجموع المتسلسلة  $1 + \omega + \omega^2 + \dots + \omega^{64}$

الحل:

$$\omega = \frac{\omega^65}{\omega} = \frac{\omega}{1} \text{ هذه متسلسلة هندسية حيث}$$

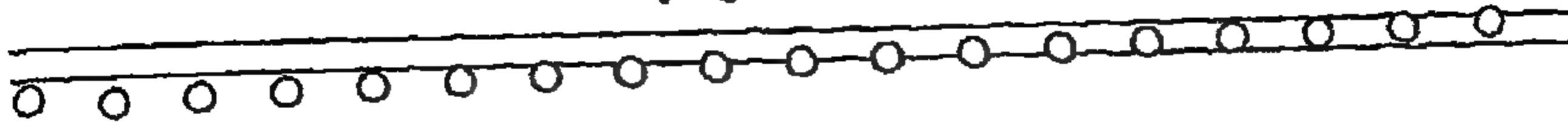
عدد حدودها  $n = 65$  حداً.

$$\text{وبما أن } r \neq 1, \frac{1 - r^n}{1 - r} = \text{ج} \text{،}$$

$$\therefore \text{ج} = \frac{1 - \omega^{65}}{1 - \omega}$$



# الأعداد المركبة



$${}^2\omega \times {}^2(\omega) = {}^{2+(21)}{}^2\omega = {}^{42}\omega \text{ لكن}$$

$$\begin{array}{r} 21 \\ 3 \overline{) 65} \\ \underline{6} \\ 05 \\ \underline{3} \\ 2 \end{array}$$

$${}^2\omega \times {}^{21}(1) =$$

$${}^2\omega \times 1 =$$

$${}^2\omega =$$

$$\underline{\underline{1 + \omega}} = \frac{(1 - \omega)(1 - \omega)}{1 - \omega} = \frac{(1 - {}^2\omega)1}{1 - \omega} = {}^{42}\omega \therefore$$

مثال (١٩):

أوجد مجموع الحل للمعادلة  ${}^4\epsilon - {}^2\epsilon + {}^2\epsilon - 1 = 0$  صفر

الحل:

بواسطة نظرية العوامل والبيان:

بما أن عوامل الحد الأخير  $1, -1$

نجد:  $1 = (1) - {}^4(1) + {}^2(1) - {}^2(1) + (1) = 0$

$$= 0 - 0 = 0 \text{ صفر}$$

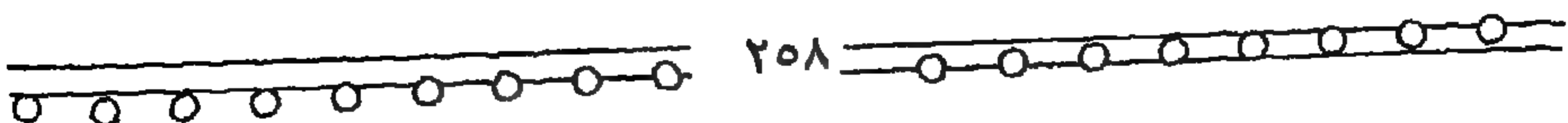
$\therefore 1$  جذراً للمعادلة منها  $1 - 0$  كامل

وبالقسمة:

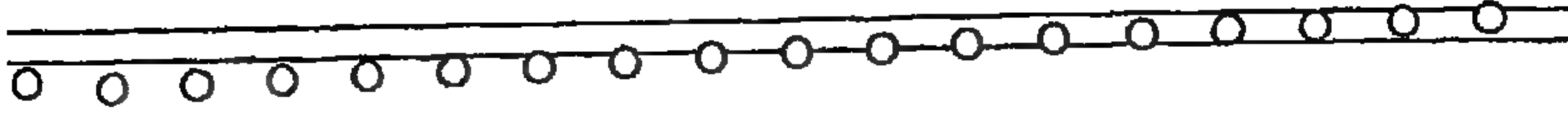
الثابت	التركيبية			
	$\epsilon$	${}^2\epsilon$	${}^2\epsilon$	${}^4\epsilon$
	1	-2	-2	1
	-1	1	1	0
	0	-1	1	1

$$\therefore \epsilon - {}^2\epsilon + {}^2\epsilon - {}^4\epsilon + 1 = (\epsilon)(1 - \epsilon + {}^2\epsilon - {}^4\epsilon) = 0 \text{ صفر}$$

$$\therefore \epsilon - {}^2\epsilon + {}^2\epsilon - {}^4\epsilon + 1 = 0 \text{ صفر}$$



### الأعداد المركبة



$$(e^2 - e) + (1 - e) = \text{صفر}$$

$$e^2 (1 - e) + (1 - e) = \text{صفر}$$

$$(1 - e)(1 + e^2) = \text{صفر}$$

∴  $1 - e$  عامل مكرر ∴  $1$  جذر مكرر

$$e^2 + 1 = \text{صفر}$$

$$e^2 - t^2 = \text{صفر} \quad \text{كون } 1 = t^2$$

$$\therefore (e + t)(e - t) = \text{صفر}$$

$$e = -t, t$$

∴ مجموعة الحل =  $\{-t, t, 1, 1\}$  وكون  $1$  ، جذر مكرر

فإن مجموعة الحل =  $\{-t, t, 1\}$

مثال (٢٠):

(i) اكتب المعادلة التالية  $2s^2 + 3ص^2 = 6$  بالصورة القطبية

تحذف  $s$  ،  $ص$  ونستبدلها بـ  $جتا هـ$  ،  $جا هـ$  ،  $ر$  .

الحل:

بما أن  $s = ر جتا هـ$  ،  $ص = ر جا هـ$

$$2س^2 + 3ص^2 = 6 \Rightarrow 2(ر جتا هـ)^2 + 3(ر جا هـ)^2 = 6$$

$$= 2(ر^2 جتا^2 هـ + 3ر^2 جا^2 هـ) = 6$$

$$\therefore ر^2 جتا^2 هـ + 3ر^2 جا^2 هـ = 3 \quad \text{المعادلة القطبية.}$$

### الأعداد المركبة



(ii) اكتب المعادلة التالية  $\frac{\pi}{2} =$  بالصورة الديكارتية

بما أن  $s = \cos \theta$

$c = \sin \theta$

بالقسمة  $\frac{c}{s} =$

لكن  $\frac{c}{s} = \frac{\pi}{2}$   $\frac{1}{\cdot}$  كون غير معرف

$\therefore \frac{c}{s} = \frac{1}{\cdot}$  وبالضرب التبادلي

$s = \cos \theta$  المعادلة الديكارتية.

## الأعداد المركبة



(٢٤ - ١٠) أسئلة وتدريبات وتمارين تتطلب حلولاً من المدرسين والدارسات

(١) احسب الجذر التربيعي للعدد المركب  $ع = -٧ - ٢٤ ت$

$$\{ \pm 3 \mp 4 ت \}$$

(٢) اكتب حاصل الضرب  $[ \text{جتا } ٨٠^\circ + ت \text{ جا } ٨٠^\circ ] [ \text{جتا } ١٣٠^\circ + ت \text{ جا } ١٣٠^\circ ]$

بصورة  $أ + ب ت$   $\{ -\sqrt{9} - ٩ ت \}$

وكذلك اكتب خارج القسمة  $\frac{١٢ (\text{جتا } ٥٤^\circ + ت \text{ جا } ٥٤^\circ)}{٣ (\text{جتا } ٢٤^\circ + ت \text{ جا } ٢٤^\circ)}$  بصورة  $أ + ب ت$

$$\{ \sqrt{2} + ٣ ت \}$$

(٣) بيّن أن  $(١ + ت)^2 = ٢ + ٢ ت$

وكذلك  $(١ - ت)^2 = ٤ - ٢ ت$

$$\text{ثم كذلك } \left( \frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{3}}{٢} ت \right) = \frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{3}}{٢} ت$$

{ارشاد: حول الى الصورة القطبية اذا أردت}

(٤) أوجد مجموعة الحل للمعادلة في حقل الأعداد المركبة

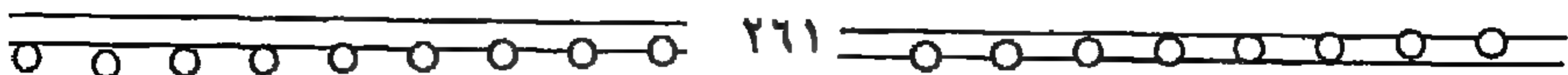
$$٣ع - ١٥ - ١٢٦ = \text{صفر} \quad \{ ٦, -٣ \pm \sqrt{2} ت \}$$

(٥) حل نظام المعادلات التالي:

$$(١) \quad س + ص = ٤$$

$$(٢) \quad (س^٢ + ص^٢) (س^٢ + ص^٢) = ٢٨٠$$

$$\{ \pm \sqrt{\frac{١٩}{٣}} ت \mp ٢, \pm \sqrt{\frac{١٩}{٣}} ت \mp ٢ \}$$



## الأعداد المركبة



(٦) اكتب حاصل الضرب  $(\sqrt{3} + 4t)(\sqrt{3} - 4t)$  كعدد مركب

بصورة  $a + bt$   $\{19 + 0t\}$

(٧) أوجد مجموعة الحل لكل من المعادلات التالية في حقل الأعداد المركبة:

$$(1) \quad 16 + e^2 = \text{صفر} \quad \{-4t, -4t\}$$

$$(2) \quad e^2 + 2e + 3 = \text{صفر} \quad \{-1 - \sqrt{2}t, -1 + \sqrt{2}t\}$$

(٨) أجز العمليات التالية في حقل الأعداد المركبة:

$$(1) \quad (-1 + 2t) + (4 + 7t) \quad \{3 + 9t\}$$

$$(2) \quad (6 - 3t) - (7 - 13t) \quad \{-1 + 10t\}$$

$$(3) \quad (4 + 5t)(7 + 2t) \quad \{18 + 43t\}$$

{ارشاد: استعن بقانون التوزيع}

$$(4) \quad (-3 + 5t) \div (3 + 4t) \quad \left\{ \frac{11}{25} + \frac{27}{25}t \right\}$$

{ارشاد: انطق المقام}

(٩) حوّل العدد المركب  $-6 + 6t$  الى الصورة القطبية.

$$\left\{ \sqrt{6} \left( \cos \frac{\pi}{4} + j \sin \frac{\pi}{4} \right) \right\}$$

(١٠) اكتب المعادلة  $z = 4j$  بالصورة الديكارتية.

$$\{z = (2 - 4j)\}$$

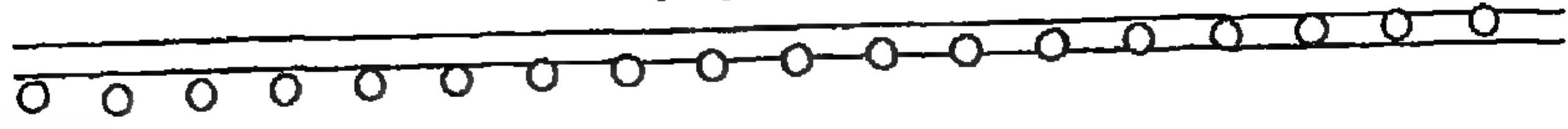
{ارشاد: استعن باكمال المربع}

(١١) اكتب معادلة الخط المستقيم  $z = 3 + 2j + 4t$  بالصورة القطبية

$$\{z = 4 + j(2 - 3t)\}$$



### الأعداد المركبة



(١٢) بيّن أن المعادلة القطبية  $r = ٨ \text{ جا } \theta + ٤ \text{ جتا } \theta$  هي معادلة دائرة، ثم أوجد مركزها ونصف قطرها.

$$\{م(٢، ٤)، \text{نق} = \sqrt{٥}\}$$

{ ارشاد: حولها الى الصورة الديكارتية }

$$(١٣) \text{ حل المعادلة } \omega^٣ + \omega^٢ + ١ = ٠ \quad \{٢\}$$

{حيث  $\omega$  من الجذور التكعيبية للواحد الصحيح}

$$(١٤) \text{ بيّن } (\omega - ١)^٦ = -٢٧$$

{ ارشاد: ابدأ من  $\omega - \omega = ٠ = \pm \sqrt[٣]{١}$  }

(١٥) أوجد مجموعة الحل للمعادلة  $٤\epsilon^٢ - ٨\epsilon + ٥ = ٠$  صفر في حقل الأعداد المركبة.

$$\{١ \pm \frac{١}{٢} \epsilon\}$$

(١٦) اكتب حاصل الضرب  $(\sqrt[٣]{-٤} - \sqrt[٣]{٤})(\sqrt[٣]{-٤} + \sqrt[٣]{٤})$  بصورة  $أ + ب\epsilon$

$$\{١٩ + ٠\epsilon\}$$

(١٧) أوجد مجموعة الحل للمعادلة  $\epsilon + \frac{١}{\epsilon} = ١$ ،  $\epsilon \neq ٠$  صفر في حقل الأعداد المركبة.

$$\{\frac{\sqrt[٣]{٢}}{٢} + \frac{١}{٢}\epsilon، \frac{\sqrt[٣]{٢}}{٢} - \frac{١}{٢}\epsilon\}$$

(١٨) أوجد مجموعة الحل للمعادلة  $٣\epsilon^٢ + ٩\epsilon + ٨ + ٢٤ = ٠$  صفر في حقل الأعداد المركبة.

$$\{-٣، \frac{\sqrt[٣]{٢٢}}{٣}\epsilon، \frac{\sqrt[٣]{٢٢}}{٣}\epsilon\}$$





(١٩) حل الاقتران  $ق(س) = ٥ + ٢س + ٥ + ٢س + ٥$  في حقل الأعداد المركبة.

$$\{(س + ٥) (س - ٥) (س + ٥)\}$$

(٢٠) ما قيم  $س$  ،  $ص$  الحقيقية التي تحقق المعادلة:

$$\{(٢, ٢ -)\} \quad \frac{س + ص}{ت} + س - ص = ٤ = \text{صفر}$$

{ ارشاد: اقسم الطرف الأيمن الى قسمين ويصوّر أ + ب ت لكل }

(٢١) اكتب العدد  $\frac{١}{١ + ت}$  بالصورة القطبية.

$$\left\{ \frac{\pi}{٣} \text{ جا } ت - \frac{١}{٢} + \frac{\pi}{٣} \text{ جتا } \frac{١}{٢} \right\}$$

{ ارشاد: ضعه أولاً بالصورة  $س + ص ت$  }

(٢٢) ضع الأعداد التالية بصورة  $س + ص ت$

$$(١) \frac{٣ ت}{١ - ت}, \quad (٢) \frac{٣ - ٢ ت}{٥ + ٢ ت}$$

$$\left\{ -\frac{٣}{٢} + \frac{٣}{٢} ت, -\frac{١١}{٢٩} - \frac{١٦}{٢٩} ت \right\}$$

(٢٣) ما قيمة  $(١ + \omega + \omega^٢)(١ + \omega + \omega^٢)$  { ٢ }

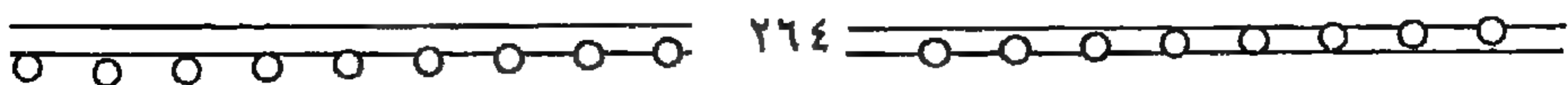
(٢٤) اكتب المعادلة القطبية للدائرة  $س^٢ + (ص - ١)س = ٩$

والمستقيم  $س = ٣$

$$\left\{ \frac{٣}{ر} = \text{جتا هـ}, \frac{٧}{ر} = \text{جتا هـ} \right\}$$

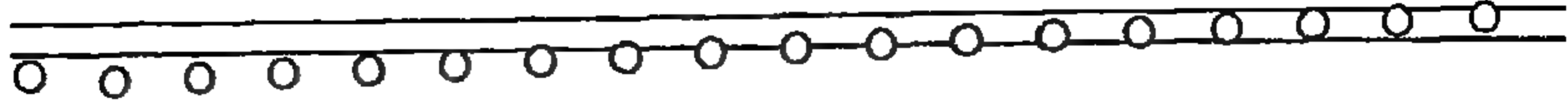
ثم اكتب معادل الشكل الهندسي الذي معادلته القطبية:

$$ر^٢ (\text{جتا } ٢ هـ) = ١ \quad \{س^٢ - ص^٢ = ١\}$$





## الأعداد المركبة



(٢٥) حل المعادلات التالية في حقل الأعداد المركبة:

$$(١) \quad \sqrt[2]{x} - 6x + 20 = \text{صفر} \quad \{ \sqrt[2]{11} \pm 3 \}$$

$$(٢) \quad \sqrt[2]{x} + 64 = \text{صفر} \quad \{ -2, 4, \sqrt[2]{2} \pm 3 \}$$

$$(٣) \quad \sqrt[2]{x} + 8x - 9 = \text{صفر} \quad \{ \pm 41 \pm 2 \}$$

$$(٤) \quad \sqrt[2]{x} - 9x + 25x + 17 = \text{صفر} \quad \{ -1, -4 \pm 2 \}$$

{ارشاد: استعن بنظرية العوامل}

(٢٦) احسب الجذور التكعيبية للعدد - ٢١٦

$$\{ -6, -\omega 6, -\omega^2 6 \}$$

(٢٧) احسب الجذور التربيعية للعدد - ٥ - ١٢ ت

$$\{ 2 - 2t, 2 + 2t \}$$

$$(٢٨) \quad \text{ما قيمة } t^0 \text{ وبصورة } s + ص \text{ ت} \quad \{ 0 - ت \}$$

(٢٩) جد الاحداثيات القطبية للنقطة (- ٣ ، ٣)

$$\{ (\pi \frac{5}{4}, \sqrt[2]{3}) \}$$

(٣٠) اكتب العدد المركب الذي مقاسه  $\pi$  وسعته  $\frac{\pi}{4}$  وبصورة  $s + ص \text{ ت}$

$$\{ \pi \frac{\sqrt[2]{2}}{2} + \pi \frac{\sqrt[2]{2}}{2} \}$$

(٣١) ما قيمة  $s$  ،  $ص$  الحقيقية عندما:

$$٥ (س + 2 \text{ ت}) - 2 (1 + ص \text{ ت}) = 11 + 4 \text{ ت}$$

(٣٢) ما معادلة الشكل الهندسي الذي تمثله المعادلة  $|ع| = 4$  حيث  $ع = س + ص \text{ ت}$

$$\{ 16 = \sqrt[2]{ص} + \sqrt[2]{س} \}$$





(٣٣) بيّن أن  $t$  هو أحد جذور المعادلة:

$$\{ -t \} \quad e^4 - 2e^2 + 2e^2 - 1 = 0$$

ثم ابحث عن جذر آخر.

(٣٤) حل المعادلة  $e^2 - 2t + 3 = 0$  صفّر في حقل الأعداد المركبة.

(٣٥) ركّب المعادلة التربيعية التي جذراها  $-2 + 5t$  ،  $-2 - 5t$

(٣٦) أوجد الجذور التربيعية لكل عدد من الأعداد التالية:

$$4, -4, 4t, -4t$$

(٣٧) إذا كان  $e = 1 + 2t$  ،  $e = -2 - 3t$

$$\text{أوجد وبصورة } s + vt : e + 1, e - 1, e \cdot 1, \frac{1}{e}$$

(٣٨) أوجد مقلوب كل من الأعداد واكتبه على شكل  $s + vt$

$$t, -t, \frac{t-1}{t+1}$$

(٣٩) أجرِ العمليات الرياضية التالية واكتب الجواب على صورة  $s + vt$

كعدد مركب.

$$(1) (2 + 3t)^2 (3 - 4t)^2$$

$$(2) \frac{2 - 3t}{2 + 5t} + \frac{2 + 3t}{2 - 5t}$$

$$(40) \text{ بيّن أن } (1 + \sqrt{3}t)^2 = -3 - \sqrt{3}t$$

{ارشاد: حوله الى الصورة القطبية ثم أعدّه الى الصورة الديكارتية  $s + vt$ }

### الأعداد المركبة



(٤١) أوجد مجموعة الحل للمعادلة  $ع^2 - ١٥ ع - ١٢٦ = ٠$  صفر في حقل الأعداد المركبة.

$$\{ \sqrt[3]{٢} - ٣ - ٣\sqrt[3]{٢} ت , \sqrt[3]{٢} + ٣ - ٣\sqrt[3]{٢} ت \}$$

(٤٢) اكتب المعادلة القطبية  $ر^٢ (١ - ٢ جا^٢ هـ) = ١$  بدلالة الاحداثيات الديكارتية.

$$\{ س - ص = ١ \}$$

(٤٣) حل المعادلة  $ع^2 + ٤ ع - ٢ ع - ٢٠ = ٠$  صفر في حقل الأعداد المركبة.

$$\{ ١٢ - ٣ - ٣ ت , ٣ + ٣ ت \}$$

(٤٤) اذا كان  $٢ ت$  أحد جذور المعادلة:

$$\{ ٢ \} \quad ك ع^2 + ٥ ع + ٨ ع + ١٠ = ٠ \text{ صفر ما قيمة ك ؟}$$

(٤٥) اكتب العدد  $\frac{١٨ + ٢ ت}{٤ - ٥ ت}$  بالصورة القطبية

$$\{ \sqrt[٢]{٢} (جتا \frac{\pi}{٤} + ت جا \frac{\pi}{٤}) \}$$

(٤٦) ما العلاقة بين المتغيرين  $س$  ،  $ص$  اذا كان  $(س + ص ت) (٣ - ٢ ت) = ١٣$

$$\{ ١٨ \} \quad (١ - ٢ \omega + \omega^٢) (١ - ٢ \omega^٨ + \omega^٢) = ٠ \text{ ما قيمة } \omega$$

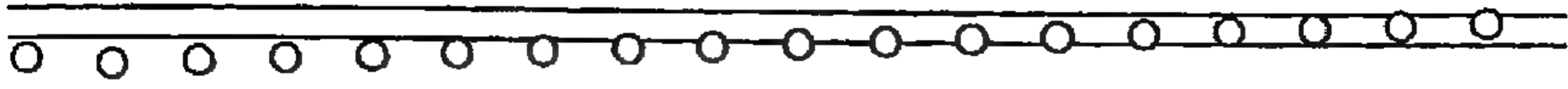
(٤٨) كَوّن المعادلة التربيعية التي جذراها  $\omega$  ،  $\omega^٢$   $\{ ع^2 + ع + ١ = ٠ \text{ صفر} \}$

$$\{ ١ \} \quad (١ + \omega)^{١٢} \text{ ما قيمة}$$

$$(٥٠) \text{ بيّن أن قيمة } (١ - \omega + \omega^٢) (١ - \omega^٢ + \omega) = ٠$$



## الأعداد المركبة



(٥١) حل المعادلة  $|ع^٢ - ٥ع + ٦| = ٦$  في حقل الأعداد المركبة.

$$\left\{ \frac{\sqrt{٢٣} + ٥}{٢}, \frac{\sqrt{٢٣} - ٥}{٢}, ٥, ٠ \right\}$$

(٥٢) حل المعادلات التالية في حقل الأعداد المركبة:

$$(١) ع^٤ - ٣ع^٢ + ٢ = \text{صفر} \quad (٢) ع^٤ + ٣ع^٢ + ٣ = \text{صفر}$$

{ارشاد: ابدأ بالحل وكأنها تربيعية}

(٥٣) حل المعادلة في حقل الأعداد المركبة

$$(س^٢ - ٥س + ٢)(٢ + س) = ٢٢$$

{ارشاد: افرض  $س^٢ - ٥س = ٢$  ثم أكمل الحل}

(٥٤) فك الأقواس  $(٣ + ٤ت)^٢$

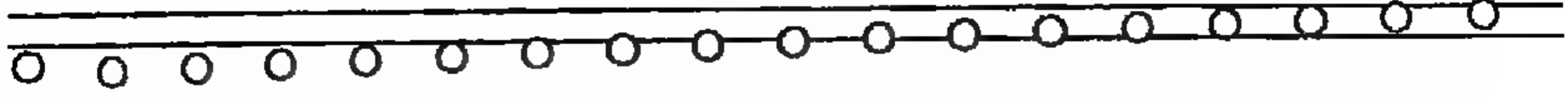
$$(٣ - ٤ت)^٢$$

$$(٣ + ٤ت)(٣ - ٤ت)$$

$$\{-٧ + ٢٤ت, -٧ - ٢٤ت, ٢٥\}$$

$$(٥٥) \text{ يبين أن } \left( \frac{\sqrt{٢}}{٢} + \frac{\sqrt{٢}}{٢}ت \right)^٢ = -١$$

{ارشاد: حوّل العدد الى الصورة القطبية ثم أعد كتابته بصورة أ + جت}



المراجع

"المراجع العربية"

(١) أ. ج. مادوكس "مبادئ التحليل الرياضي" ترجمة وليد ديب، منشورات مجمع

اللغة العربية الأردني ١٩٨٤ م.

(٢) إيرل و. سوكوفسكي "حساب التفاضل والتكامل والهندسة التحليلية"

جزءان ، ترجمة أحمد سعيدان ورفاقه، ١٩٨١ م.

(٣) سعد حسنين محمد ورفاقه، "المدخل في الرياضيات الحديثة" ، جزءان، دار

المعارف بمصر ، ١٩٧١ م.

(٤) سليمان أبو صبحا "الرياضيات للعلوم الاقتصادية والادارية" مكتبة بغداد -

عمان ، ١٩٩٤ م.

(٥) شارلز سولومون، "الرياضيات" ترجمة علي بن الأشهر، معهد الاتحاد العربي،

بيروت - ١٩٨١ م.

(٦) عادل سودان ورفاقه "الرياضيات المعاصرة" جزءان، مؤسسة الرسالة، بيروت،

١٩٧١ م.

(٧) عايش زيتون "أساسيات الاحصاء الوصفي" ، دار عمار للنشر والتوزيع،

عمان، ١٩٨٤ م.

(٨) عبدالرحيم القواسمة وزميله، "دليل الاختبارات في الرياضيات المعاصرة"

جزءان، دار الفرقان للنشر والتوزيع - عمان ، ١٩٨٢ م.

(٩) عبدالعزيز هيكل ورفيقه "الاحصاء"، دار النهضة العربية للطباعة والنشر،

بيروت، ١٩٨٠ م.

(١٠) عبدالعزيز هيكل ورفيقه "الرياضيات" ، دار النهضة للطباعة والنشر،

بيروت، ١٩٨٠ م.

(١١) عبدالعزيز هيكل "الرياضة المالية" دار النهضة للطباعة والنشر، بيروت،

١٩٧٨ م.

(١٢) علي عبدالله الدفاع "نوابغ علماء العرب في الرياضيات" دار الاعتصام.

(١٣) فيجودسكي، "المرجع في الرياضيات العالية" ترجمة أنطون منصور، دار

جبر للطباعة والنشر، روسيا - موسكو، ١٩٧٥ م.

(١٤) كما يعقوب "الرياضيات الحديثة" جزءان، دار المعارف بمصر، ١٩٧٣ م.

(١٥) محمد عادل سودان، "الرياضيات العامة"، ثلاثة أجزاء، دار العلوم للطباعة

والنشر.

(١٦) محمد عاطف خير الدين ورفاقه، "المثالي في الرياضيات المعاصرة" عدة

أجزاء.

(١٧) نيل ديفدسون ورفيقه "الجبر المجرد" ترجمة ديب حسين، منشورات مجمع

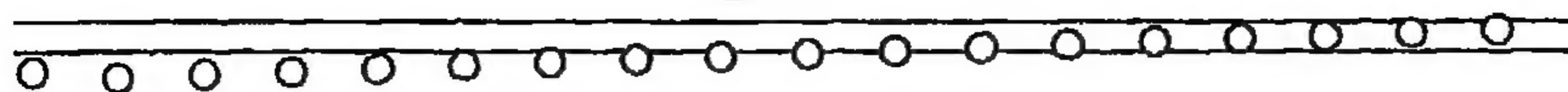
اللغة العربية الأردني، ١٩٨٢ م.

(١٨) نخبة من المؤلفين "الرياضيات المدرسية وفق منهاج التربية والتعليم الأردنية"،

٢٠٠٧ م.

(١٩) وليم جويس ورفيقه "مبادئ المعادلات التفاضلية"، ترجمة أحمد علاونه

ورفيقه، مركز الكتب الأردني، ١٩٩٠ م.



المراجع الأجنبية:

- (1) Erwin Kreyszing "Advanced Engineering maths" 1993.
- (2) H. S. Hall "Elementary Algebra For Schools" London, 19932.
- (3) Richard Johnson Baygh, "Discrete maths" 1993.
- (4) R. D. Knight , "New mathematics" Five Books, 1968.
- (5) S. L . Salar, "Calculus, One and Several Variables" 1982.
- (6) Robert Ellis and others, "Calculus With Analytic Geometry, 1990.
- (7) Robert. T. Seeley, "Calculus of one Variable" 1972.

**Inv: 2401**

**Date:4/2/2014**









الرياضيات الشاملة

( التكامل - القطوع - الأعداد المنتالية )

Bibliotheca Alexandrina



1213164



دارأسامة

للنشر والتوزيع

الأردن - عمان

هاتف: 00962 6 5658252 / 00962 6 5658253

فاكس: 00962 6 5658254 ص.ب: 141781

البريد الإلكتروني: darosama@orange.jo

الموقع الإلكتروني: www.darosama.net